INTISARI

Sifat Prima dan Semiprima Mendasar Aljabar Lintasan dan Aljabar Lintasan Leavitt atas Ring Komutatif Unital pada Graf Berhingga

Oleh

KHURUL WARDATI

10/308384/SPA/00351

Motivasi penelitian disertasi ini berawal dari hasil penelitian tentang syarat perlu dan cukup suatu graf sehingga aljabar lintasan Leavitt atas ring komutatif unital ($L_R(E)$) sederhana mendasar. Sifat sederhana mendasar ini didefinisikan berdasarkan definisi ideal dasar dalam $L_R(E)$ yang merupakan perumuman dari aljabar lintasan Leavitt atas lapangan ($L_K(E)$). Ide pengembangan sifat-sifat $L_R(E)$ didasarkan pada temuan syarat perlu dan cukup suatu graf sehingga $L_K(E)$ prima, dan sebarang $L_K(E)$ bersifat semiprima. Secara serupa, karena $L_K(E)$ adalah perluasan dari aljabar lintasan atas lapangan (KE) maka perlu dikaji perumuman aljabar lintasan atas ring komutatif unital (RE). Temuan syarat perlu dan cukup suatu graf sehingga KE prima, memunculkan ide untuk mengkaji sifat-sifat RE.

Kajian aljabar bebas diperlukan karena aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt merupakan aljabar bebas. Definisi ideal dasar dalam aljabar bebas merupakan perumuman definisi ideal dasar dalam $L_R(E)$. Suatu ideal dalam aljabar bebas disebut ideal bebas jika ideal tersebut memiliki basis yang termuat dalam suatu basis aljabar tersebut. Ideal bebas merupakan syarat perlu dan cukup suatu ideal merupakan ideal dasar. Keduanya mempunyai peran besar dalam pengembangan sifat-sifat aljabar bebas. Berdasarkan definisi ideal dasar, dapat didefinisikan ideal dasar (semi) prima serta pengertian aljabar bebas (semi) prima mendasar. Hasil utama kajian aljabar bebas ini adalah teorema tentang syarat perlu dan cukup suatu ideal dasar dalam aljabar bebas merupakan ideal dasar (semi) prima, juga syarat perlu dan cukup aljabar bebas merupakan aljabar (semi) prima mendasar. Teorema ini berperan dalam pembuktian sifat (semi) prima mendasar aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt.

Terdapat beberapa kesamaan sifat antara aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt baik atas lapangan maupun atas ring komutatif unital. Aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt merupakan aljabar asosiatif dan aljabar bertingkat. Selain itu, keduanya merupakan aljabar unital jika grafnya berhingga, dan merupakan aljabar berdimensi berhingga jika grafnya berhingga dan asiklis. Aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt pada graf berhingga memiliki elemen satuan yang sama, yaitu jumlah dari semua titik pada grafnya, namun jika grafnya tak berhingga maka keduanya merupakan aljabar yang memiliki elemen unit lokal.

Ideal sisi dalam RE pada graf berhingga dan terhubung adalah ideal yang terdiri dari kombinasi linear lintasan-lintasan bukan titik. Ideal sisi merupakan ideal dasar bertingkat yang tidak memuat titik. Ideal sisi ini dapat diperumum menjadi ideal $I(X)$ dalam RE pada graf berhingga E yang tidak harus terhubung, dengan $X \subseteq E^0$ subhimpunan herediter tak kosong dan tidak memuat titik terasing. Ideal $I(X)$ terdiri dari kombinasi linear lintasan-lintasan bukan titik yang berujung di X. Ideal dasar bertingkat $I(X)$ memuat ideal-ideal dasar $I(X)_{n\in\mathbb{N}}$, yaitu ideal dari kombinasi linear lintasan-lintasan yang berujung di X dengan panjang lebih besar atau sama dengan n, sehingga $I(X)_n$ tidak memuat X untuk setiap n. Selanjutnya, dapat didefinisikan ideal dasar bertingkat yang dikonstruksi oleh subhimpunan herediter $H \subseteq E^0$, yaitu I_H yang unsur-unsurnya merupakan kombinasi linear dari titik-titik di H atau lintasan-lintasan yang berujung di H. Ideal dasar bertingkat I_H dalam RE ini merupakan perumuman dari ideal dasar bertingkat I_H dalam $L_R(E)$ yang didefinisikan sebagai ideal dari kombinasi linear monomial-monomial berbentuk $\alpha\beta^*$ dengan $\alpha,\ \beta \in Path(E)$ dan $r(\alpha) = r(\beta) \in H$.

Jika $H \subset E^0$ herediter tersaturasi maka ideal bertingkat I_H dalam RE merupakan ideal dasar prima jika dan hanya jika $M = E^0 \backslash H$ merupakan ekor maksimal dan untuk setiap lintasan μ dengan $r(\mu) \in M$ terdapat lintasan ν sedemikian sehingga $r(\mu) = s(\nu)$ dan $s(\mu) = r(\nu)$. Syarat kedua ini merupakan syarat perlu dan cukup ideal bertingkat I_H dalam RE merupakan ideal dasar semiprima. Selain itu, Syarat perlu dan cukup aljabar lintasan RE prima mendasar adalah jika E^0 merupakan ekor maksimal dan untuk setiap lintasan μ terdapat lintasan ν sedemikian sehingga $r(\mu) = s(\nu)$ dan $s(\mu) = r(\nu)$. Syarat kedua ini merupakan syarat perlu dan cukup aljabar lintasan RE semiprima mendasar. Hal ini dikarenakan $I_\emptyset$ adalah ideal dasar nol dengan $\emptyset$ merupakan subhimpunan herediter tersaturasi.

Jika $H \subset E^0$ herediter tersaturasi maka ideal dasar bertingkat I_H dalam $L_R(E)$ adalah prima jika dan hanya jika $M = E^0 \backslash H$ adalah ekor maksimal. Ideal dasar nol dalam $L_R(E)$ juga sama dengan $I_\emptyset$, dan E^0 selalu memenuhi kondisi $MT1, MT2$ sehingga syarat perlu dan cukup $L_R(E)$ prima mendasar adalah E^0 adalah ekor maksimal, yaitu untuk setiap $v, w \in E^0$ terdapat $y \in E^0$ sedemikian sehingga $v \leq y$ dan $w \leq y$. Selain itu, sebarang ideal dasar bertingkat dalam $L_R(E)$ merupakan ideal dasar semiprima sehingga sebarang $L_R(E)$ merupakan aljabar semiprima mendasar.

Kata-kata kunci: *aljabar lintasan, aljabar lintasan Leavitt, ideal dasar, ideal bebas, ideal dasar (semi) prima, aljabar (semi) prima mendasar, herediter, tersaturasi, ekor maksimal.*

ABSTRACT

On Basically Prime and Semiprime Path Algebras and Leavitt Path Algebras over a Unital Commutative Ring On a Finite Graph

By

KHURUL WARDATI

10/308384/SPA/00351

The initial idea of the dissertation came from the results of research on the necessary and sufficient conditions of a graph such that a Leavitt path algebra over a unital commutative ring ($L_R(E)$) is basically simple. The definition of basically simple is based on the term of basic ideal in $L_R(E)$ that is a generalization of Leavitt path algebras over a field ($L_K(E)$). The idea of developing the properties of $L_R(E)$ is based on the findings of the necessary and sufficient condition of a graph so that $L_K(E)$ is prime, and any $L_K(E)$ is semiprime. Similarly, since $L_K(E)$ is an extension of path algebras over a field (KE) then we need to discuss path algebras over a unital commutative ring (RE) as a generalization of KE. A discovery of the necessary and sufficient conditions on a graph, such that KE is a prime algebra, inspired the idea to examine the properties of RE.

We need to discuss the free algebras because both path algebras and Leavitt path algebras are free algebras. The definition of basic ideal in free algebras is a generalization of the basic ideal in $L_R(E)$. An ideal in free algebras is called a free ideal if it has a basis contained in a basis of its algebra. The free ideal is a necessary and sufficient condition of a basic ideal. Both have an important role in developing the properties of the free algebras. Based on the basic ideal, we can define a (semi) prime basic ideal and the term of basically (semi) prime algebra. The main results of this study are the theorems of the necessary and sufficient conditions of a basic ideal that is a (semi) prime ideal, and the necessary and sufficient conditions of a free algebra that is basically (semi) prime. These theorems contribute in the proof of basically (semi) prime path algebras and Leavitt path algebras.

There are some similarities between the properties of path algebras and Leavitt path algebras on a graph, both over a field and a unital commutative ring. Each of these is an associative algebra and a graded algebra. In addition, it is a unital algebra if the graph is finite, a finite-dimensional algebra if the finite graph is acyclic. These algebras on a finite graph have a same unity that is a sum of all vertices, but if the graph is infinite then the algebras have a local unit.

An arrow ideal in RE on a connected finite graph is a graded basic ideal of all linear combinations of paths that are not vertices, then it does not contain any vertex. We can generalize the arrow ideal to an ideal $I(X)$ in RE on a finite graph E that should not be connected, in which $X \subseteq E^0$ is a nonempty hereditary subset which has no isolated vertex. The graded basic ideal $I(X)$ consists of all linear combinations of paths whose range in X and the paths are not vertices. The ideal $I(X)$ contains basic ideals $I(X)_{n\in\mathbb{N}}$ that is an ideal of all linear combinations of paths whose range in X of length greater than or equal to n, so that $I(X)_n$ does not contain X for every n. Furthermore, we can define a graded basic ideal constructed by a hereditary subset $H \subseteq E^0$, namely I_H that is an ideal of all linear combinations of not only paths whose range in H but also vertices in H. The graded basic ideal I_H is a generalization of the graded basic ideal in $L_R(E)$ defined as an ideal of linear combinations of monomials $\alpha\beta^*$ with $\alpha,\ \beta \in Path(E)$ and $r(\alpha) = r(\beta) \in H$.

If $H \subset E^0$ is saturated hereditary then a graded basic ideal I_H in RE is prime if only if $M = E^0 \backslash H$ is a maximal tail and for every path μ whose $r(\mu) \in M$, there is a path ν such that $r(\mu) = s(\nu)$ and $s(\mu) = r(\nu)$. The second condition is a necessary and sufficient condition for semiprime basic ideal I_H in RE. In addition, path algebra RE is basically prime if only if E^0 is a maximal tail and for every path μ, there is a path ν such that $r(\mu) = s(\nu)$ and $s(\mu) = r(\nu)$. The second condition is a necessary and sufficient condition for basically semiprime RE. This is because $I_\emptyset$ is a zero basic ideal and $\emptyset$ is a saturated hereditary subset.

If $H \subset E^0$ is saturated hereditary then a graded basic ideal I_H in $L_R(E)$ is prime if only if $M = E^0 \backslash H$ is a maximal tail. A zero basic ideal in $L_R(E)$ is also equal to $I_\emptyset$ and E^0 always satisfies the conditions $MT1, MT2$ then Leavitt path algebra $L_R(E)$ is basically prime if only if E^0 is a maximal tail. It means that E^0 satisfies the condition $MT3$, that is for every $v, w \in E^0$ there exists $y \in E^0$ such that $v \leq y$ and $w \leq y$. In addition, any graded basic ideal in $L_R(E)$ is semiprime so that every Leavitt path algebra $L_R(E)$ is basically semiprime.

Keywords: *path algebra, Leavitt path algebra, basic ideal, free ideal, (semi) prime basic ideal, basically (semi) prime algebra, hereditary, saturated, maximal tail.*