

INTISARI

Candi Prambanan merupakan kompleks candi Hindu terbesar di Indonesia yang telah dinyatakan oleh UNESCO sebagai situs warisan dunia pada tahun 1991. Situs ini terletak di dekat kaki gunung Merapi dan berada di jalur patahan aktif yaitu Sesar Opak, menyebabkan Candi Prambanan memiliki resiko terdampak bencana alam yang cukup tinggi. Selain itu, struktur tanah di sekitar kompleks candi yang terdiri atas endapan Gunung Merapi Muda dan endapan pasir halus yang bersifat tidak terlalu padat dan mudah bergeser menyebabkan Candi Prambanan rentan terhadap pergerakan secara horisontal dan vertikal. Pemantauan berkala dilakukan dengan pengukuran metode geodetik menggunakan *Total Station*, namun analisis pergerakan vertikal yang terjadi belum dilakukan secara komprehensif. Oleh karena itu, dalam penelitian ini dilakukan hitungan pergerakan vertikal titik pantau pada tubuh Candi Prambanan dan selanjutnya dilakukan analisis pergerakan vertikal tersebut.

Data yang digunakan yaitu data ukuran sudut *heling* dan jarak datar pengamatan kala I (tahun 2019) serta kala II (tahun 2020) dari titik-titik pantau deformasi yang tersebar pada enam candi di pelataran Candi Prambanan. Perhitungan nilai tinggi (Z) dan simpangan bakunya dilakukan dengan metode hitung perataan kombinasi, sedangkan analisis deformasi vertikal yang dilakukan dengan uji statistik berupa uji signifikansi beda parameter dan uji pergerakan titik menggunakan tingkat kepercayaan 95%. Selanjutnya analisis kecepatan pergerakan vertikal dilakukan pada masing-masing titik pantau.

Penelitian ini menghasilkan nilai Z pada kala II beserta ketelitiannya, besar nilai pergerakan vertikal, dan kecepatan pergerakan vertikal pada setiap titik pantau. Nilai Z yang diperoleh pada kala II memiliki nilai simpangan baku kurang dari 4 mm, yaitu antara 0,322 mm s.d. 3,096 mm. Pergerakan vertikal titik-titik pantau deformasi pada badan candi dinyatakan dalam fraksi sentimeter dan memiliki nilai berkisar -0,737 cm s.d. 2,941 cm, dengan kecepatan pergerakan vertikal titik berkisar -0,737 cm/tahun s.d. 2,941 cm/tahun.

Kata kunci : Candi Prambanan, *Total Station*, hitung perataan, metode kombinasi, deformasi, pergerakan vertikal, kecepatan.

ABSTRACT

Prambanan Temple is one of the largest Hindu temples in Indonesia that has been declared as one of the world heritage sites by UNESCO in 1991. This cultural site is located near the foot of Mount Merapi and is on an active fault line, known as Opak Fault, causing the Prambanan Temple to have a higher risk of being affected by natural disasters. Besides, the soil structure underneath the temples consists of Young Mount Merapi sediment and sand sediment that is characterized as a light structure and can shift easily makes Prambanan Temple susceptible to horizontal and vertical movements. Geodetic measurement was held periodically using Total Station, but there haven't been any comprehensive analysis for the vertical movements. Hence in this study, a calculation for the vertical movements of the monitoring point located on the body of the Prambanan Temple was generated and then an analysis of the vertical movement was generated.

This study uses observations data of the vertical angles and horizontal distance for the first-period measurement (2019) and the second-period measurement (2020) from the deformation monitoring points spread across 6 temples in the yard of Prambanan Temple. The computation of the height value (Z) and its standard deviation is carried out using a combined least square adjustment method, while the vertical deformation analysis is carried out by a statistical test which consists of a significance test for different parameters and a single point displacement test using confidence level of 95%. Furthermore, analysis of the vertical movement velocity is carried out at each monitoring point.

The result of this study is the Z value for the second-period measurement along with its precision, the value of vertical movement, and the velocity of vertical movement at each monitoring point. The Z value obtained in the second-period measurement has a standard deviation value of less than 4 mm, which is a range of 0,322 mm to 3,096 mm. The vertical movement of the deformation monitoring points on the body of the temple is expressed in centimetre fractions and has values ranging from -0,737 cm to 2,941 cm, with vertical movement velocity ranging from -0,737 cm/year to 2,941 cm/year.

Keyword : Prambanan Temple, Total Station, least square adjustment, combination method, deformation, vertical movement, velocity.

BAB I

PENDAHULUAN

I.1. Latar Belakang

Candi Prambanan merupakan situs bersejarah peninggalan kerajaan Mataram yang kira-kira dibangun pada abad ke 9 Masehi. Candi Prambanan yang merupakan kompleks candi Hindu terbesar di Indonesia, terletak di Desa Prambanan, Daerah Istimewa Yogyakarta, memiliki posisi geografis $7^{\circ}45'8''\text{LS}$ dan $110^{\circ}29'30''\text{BT}$. Candi Prambanan telah dinyatakan sebagai situs warisan dunia (*World Heritage*) oleh *United Nations Educational Scientific and Cultural Organization* (UNESCO) pada tahun 1991, sehingga perlu dijaga kelestarian dan keberadaannya dari bahaya kerusakan fisik baik karena usia, kegagalan struktur ataupun bencana alam yang terjadi. Kompleks Candi Prambanan terdiri atas beberapa candi yang dibangun sebagai persembahan untuk Trimurti (tiga dewa utama Hindu), yaitu Candi Brahma, Candi Wisnu, dan Candi Siwa (Candi Roro Jonggrang) serta candi yang berukuran lebih kecil dari ketiga candi utama yaitu Candi Nandi, Candi Angsa, dan Candi Garuda.

Situs ini terletak tidak jauh dari kaki Gunung Merapi dan berada dekat aliran Sungai Opak yang juga merupakan bagian dari Sesar Opak. Sesar Opak merupakan salah satu patahan aktif yang terletak di sepanjang aliran Sungai Opak yang memiliki arah ke barat daya-timur laut (Natawidjaja, 2016). Sebagai akibat dari gempa Yogyakarta tahun 2006, beberapa bangunan candi di kompleks Candi Prambanan mengalami kerusakan. Struktur tanah di sekitar kompleks Candi Prambanan terdiri atas endapan Gunung Merapi Muda dan endapan pasir halus (Pramumijoyo, dkk., 2009) yang merupakan kondisi yang kurang tepat untuk konstruksi bangunan karena sifatnya yang tidak padat sehingga mudah bergeser.

Sebagai salah satu bentuk pelestarian Candi Prambanan, Universitas Gadjah Mada mengadakan kegiatan Penelitian Terapan Unggulan Perguruan Tinggi (PTUPT) berupa aktivitas pemantauan stabilitas dan deformasi pada Candi Prambanan yang dilakukan secara berkala. Pemantauan pada tahun 2018 sudah dilakukan pada titik

pantau yang terletak pada enam badan candi yang terletak di pelataran dalam Candi Prambanan.

Pengukuran deformasi sebelumnya sudah pernah dilakukan pada permukaan tanah di sekitar Candi Prambanan, namun pengukuran pada badan candi baru dilaksanakan pertama kali pada tahun 2018 dalam kegiatan PTUPT yang menghasilkan koordinat 3D dari titik pantau yang berada pada badan candi (Widyaningsih, 2019). Penelitian yang terdahulu hanya menghasilkan nilai koordinat 3D dari titik-titik pantau dan belum menghasilkan nilai deformasi pada titik pantau yang terletak di badan candi. Penelitian ini dapat menghasilkan nilai deformasi horizontal dan vertikal pada titik pantau yang terletak di badan Candi Prambanan. Nilai deformasi pada badan candi dianggap perlu mengingat lokasi Candi Prambanan yang terletak di jalur patahan aktif yaitu Sesar Opak dan faktor usia serta jenis material penyusun struktur Candi Prambanan. Jenis material penyusun pada struktur bangunan bersejarah dapat memberikan pembebanan pada struktur bangunan itu sendiri sehingga dapat menjadi salah satu penyebab terjadinya deformasi (Telioni, dkk., 2006).

Perbedaan penelitian ini dengan penelitian sebelumnya yaitu pada penelitian sebelumnya hanya dihasilkan nilai koordinat 3D titik pantau pada tahun 2019 beserta ketelitiannya. Sedangkan hasil pada penelitian ini berupa nilai tinggi titik pantau pada tahun 2020 beserta ketelitiannya, nilai pergerakan vertikal, dan nilai kecepatan pergerakan vertikal pada setiap titik pantau.

Pelaksanaan kegiatan pemantauan titik pantau badan Candi Prambanan dilakukan dengan alat *Total Station* (TS) yang didirikan pada titik kontrol yang berada di sekitar halaman candi. Metode pengukuran vertikal menggunakan metode trigonometrik. Berdasarkan pengukuran tersebut dapat diperoleh data berupa jarak dan sudut *heling*, yang selanjutnya diolah untuk mendapatkan koordinat Z (nilai tinggi) dari setiap titik pantau.

Sebelum nilai tinggi digunakan untuk menentukan nilai deformasi vertikal pada badan Candi Prambanan, dibutuhkan hitung perataan untuk menghasilkan nilai estimasi nilai tinggi beserta ketelitiannya. Hitung perataan yang digunakan dalam penelitian ini yaitu hitung perataan metode kombinasi. Penelitian ini menggunakan metode kombinasi karena menurut Uotila (dalam Apriyanti, 2015) pembentukan persamaan lebih fleksibel, tidak ada aturan untuk penentuan parameter dan ukuran,

serta nilai residu dan nilai parameter dapat ditentukan secara bersamaan saat proses iterasi.

Nilai pergerakan vertikal dari titik-titik pantau dapat diperoleh dengan data dua kala waktu yang berbeda. Data yang digunakan yaitu data sekunder berupa data ukuran titik pantau pada tahun 2019 dan data primer berupa data ukuran titik pantau pada tahun 2020.

I.2. Identifikasi Masalah

Nilai deformasi dari titik pantau merupakan hal yang penting untuk diketahui sebagai salah satu bentuk tindakan pencegahan kerusakan demi kelestarian kompleks Candi Prambanan. Namun, hingga saat ini belum ada penelitian yang menghasilkan nilai deformasi vertikal dari titik pantau pada badan Candi Prambanan. Penelitian ini dilakukan untuk mendapatkan nilai pergerakan vertikal yang terjadi pada badan candi menggunakan hitung perataan dengan metode kombinasi serta analisis deformasi dengan uji signifikansi beda parameter, uji pergerakan titik pantau, dan analisis kecepatan pergerakan vertikal titik pantau.

I.3. Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan identifikasi permasalahan tersebut, maka pertanyaan penelitian ini sebagai berikut:

1. Berapakah nilai tinggi dan ketelitian titik pantau badan Candi Prambanan yang diukur pada tahun 2020?
2. Berapakah nilai pergerakan vertikal untuk setiap titik pantau badan Candi Prambanan dan apakah terjadi pergerakan vertikal secara signifikan pada tubuh Candi Prambanan?
3. Berapakah nilai dan arah kecepatan pergerakan vertikal untuk setiap titik pantau badan Candi Prambanan selama interval waktu 2019 s.d. 2020?

I.4. Cakupan Penelitian

Pembahasan dalam penelitian ini mencakup beberapa hal sebagai berikut:

1. Candi yang dijadikan objek pengamatan pada kompleks Candi Prambanan yaitu Candi Siwa, Brahma, Wisnu, Nandi, Angsa, dan Garuda.
2. Pengukuran dilakukan dengan alat ukur TS.
3. Metode pengukuran vertikal menggunakan metode trigonometrik.
4. Perhitungan nilai deformasi menggunakan data ukuran pada kala 2019 dan 2020.
5. Tinggi titik didefinisikan sebagai tinggi geometris menggunakan sistem tinggi ellipsoid WGS'84.
6. Pembentukan model matematis dan perhitungan estimasi koordinat menggunakan metode kombinasi.
7. Analisis deformasi menggunakan uji signifikansi beda parameter, uji pergerakan titik pantau, dan penentuan kecepatan pergerakan vertikal titik pantau.

I.5. Tujuan Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk:

1. Menentukan nilai beserta ketelitian tinggi untuk setiap titik pantau badan Candi Prambanan dari hasil pengukuran tahun 2020.
2. Menentukan nilai pergerakan vertikal untuk setiap titik pantau badan Candi Prambanan dan menentukan signifikansi pergerakan vertikal.
3. Menentukan nilai dan arah kecepatan pergerakan vertikal untuk setiap titik pantau badan Candi Prambanan pada interval waktu 2019 s.d. 2020.

I.6. Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Dalam bidang keilmuan geodesi, penelitian ini dapat menjadi salah satu studi kasus dalam penentuan nilai deformasi menggunakan metode hitung perataan metode kombinasi dengan data yang dihasilkan dari pengukuran dengan alat

TS. Selain itu, data hasil pengukuran pada penelitian ini dapat digunakan sebagai data kala II untuk pengamatan deformasi pada badan Candi Prambanan.

2. Untuk pihak Balai Konservasi Candi Prambanan, penelitian ini dapat menghasilkan nilai deformasi vertikal yang terjadi pada badan Candi Prambanan yang dapat digunakan untuk memantau kondisi kestabilan konstruksi candi sebagai bentuk pencegahan kerusakan pada candi dalam rangka pelestarian peninggalan budaya.

I.7. Tinjauan Pustaka

Penelitian terkait deformasi pada kasus struktural bangunan cagar budaya pernah dilakukan oleh Telioni, dkk. (2006) pada *Temple of Zeus* (Kuil Zeus), Nemea, Yunani. Penelitian ini melakukan analisis deformasi horisontal dan vertikal yang terjadi pada Kuil Zeus dengan menempatkan titik-titik pantau deformasi pada badan kuil dan di sekitar monumen tersebut. Terdapat sepuluh titik kontrol yang digunakan sebagai jaring pengukuran posisi horisontal menggunakan alat TS dan sembilan titik kontrol yang digunakan sebagai jaring pengukuran posisi vertikal dengan *waterpass* dari titik pantau deformasi tersebut. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa terdapat pergeseran horisontal mencapai nilai 3 cm pada sisi utara dan timur bangunan. Pergerakan vertikal yang signifikan terjadi pada sisi barat laut bangunan dengan nilai sebesar 57 mm, yang disebabkan oleh pengaruh dari lokasi situs Kuil Zeus yang terletak tepat di sebelah sungai Nemea serta pondasi kuil yang kurang kokoh.

Penelitian terkait deformasi di Candi Prambanan pernah dilakukan oleh Wicaksono (2014) yang menganalisis pergeseran horisontal pada dua kala pengukuran, yaitu tahun 2011 dan 2013. Penelitian ini dilakukan dengan data hasil pengukuran menggunakan alat ukur teodolit berupa sudut dan jarak antar titik pantau yang tersebar di sekitar Candi Prambanan. Terdapat delapan titik yang digunakan sebagai jaring pengukuran berupa poligon tertutup. Perhitungan data dilakukan menggunakan hitung perataan metode parameter dengan kendala minimum untuk menentukan koordinat titik pantau pada masing-masing kala. Selanjutnya dilakukan perhitungan nilai pergerakan pada titik pantau dan diperoleh nilai pergerakan titik

pantau yaitu berkisar antara -0,561 mm s.d. 9,942 mm. Analisis deformasi horisontal dilakukan dengan uji pergeseran titik menggunakan tabel t-student dengan nilai uji sebesar 2,92. Hasil analisis deformasi menunjukkan bahwa semua titik pantau tidak mengalami pergeseran yang signifikan.

Selanjutnya, Shodiq (2015) melakukan analisis deformasi horisontal untuk Candi Prambanan pada sebelum dan sesudah gempa Yogyakarta tahun 2006 lalu. Penelitian ini dilakukan dengan data hasil pengukuran metode terestris pada jaring pantau di kompleks Candi Prambanan, khususnya di Candi Syiwa pada kala tahun 1999, 2001, 2011, 2013, dan 2015. Perhitungan nilai koordinat dilakukan dengan hitung perataan kendala dalam, kemudian dilakukan uji statistik berupa uji global dan *data snooping*. Proses analisis deformasi dilakukan dengan uji kesebangunan jaring, uji pergeseran titik, dan uji signifikansi parameter. Penelitian Shodiq (2015) menunjukkan bahwa terjadi pergeseran pada data tahun 2001 dan 2011 sebesar 2,282 m. Kesimpulan penelitian tersebut terjadi pergerakan titik yang signifikan pada selang waktu 2001 s.d. 2011 yang disebabkan oleh gempa Yogyakarta tahun 2006.

Penelitian oleh Widyaningsih (2019) berfokus dalam menghitung nilai koordinat 3D serta ketelitian dari setiap titik pantau pada badan Candi Prambanan. Pengukuran dilakukan menggunakan alat TS. Pengukuran posisi horisontal dilakukan dengan metode pemotongan ke muka dan pengukuran posisi vertikal menggunakan metode trigonometrik. Perhitungan nilai koordinat absis (X) dan ordinat (Y) dilakukan menggunakan hitung perataan metode parameter berbobot dengan kendala minimum, sedangkan nilai koordinat tinggi (Z) dihitung dengan hitung perataan metode kombinasi. Kesimpulan penelitian ini yaitu nilai X dan Y dari 19 titik pantau memiliki yaitu antara 0,03 mm s.d. 0,58 mm untuk nilai absis dan 0,06 mm s.d. 0,45 mm untuk nilai ordinat. Ketelitian nilai Z pada 19 titik pantau yaitu berkisar antara 0,29 mm s.d. 2,76 mm.

Berbeda dengan penelitian sebelumnya, penelitian ini melakukan analisis pergerakan vertikal dengan data dua kala, kala I yaitu data hasil pengukuran pada tahun 2019 (data sekunder) dan kala II yang merupakan data hasil pengukuran tahun 2020 (data primer). Nilai tinggi titik pantau diperoleh dengan hitung perataan metode kombinasi dengan kendala minimum. Selanjutnya nilai tinggi yang diperoleh diuji secara statistik melalui tahap uji global dan *data snooping*. Kemudian analisis terhadap

pergerakan vertikal pada titik pantau dilakukan dengan uji statistik berupa uji pergerakan titik dan uji signifikansi beda parameter, serta penentuan nilai kecepatan pergerakan vertikal pada titik-titik pantau yang tersebar di sekitar kompleks Candi Prambanan.

I.8. Landasan Teori

I.8.1. Deformasi Vertikal

Secara umum, deformasi adalah perubahan atau pergeseran suatu titik secara absolut atau relatif akibat adanya pergerakan lempeng. Perubahan kedudukan mengacu kepada suatu sistem koordinat referensi tertentu. Salah satu penyebab deformasi yaitu adanya beban atau gaya berat pada materi tertentu (Widjajanti, 2001).

Menurut Widjajanti (2001), deformasi pada suatu materi dapat terbagi menjadi tiga jenis deformasi, yaitu:

a. Translasi

Translasi adalah pergeseran yang terjadi terhadap acuan sumbu koordinat tertentu tanpa disertai perubahan bentuk materi.

b. Rotasi

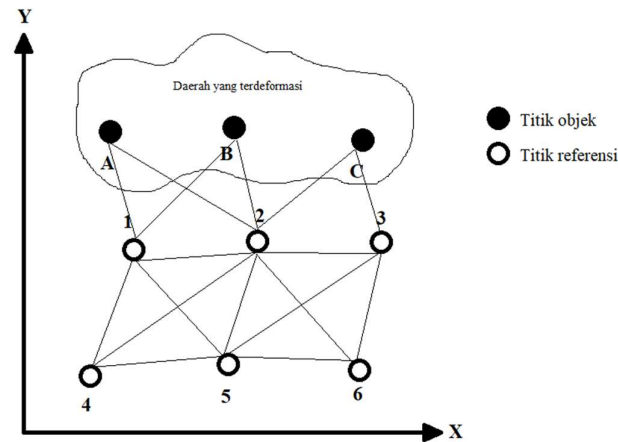
Rotasi adalah suatu perubahan posisi yang merubah sudut terhadap koordinat acuan tertentu tanpa disertai perubahan bentuk.

c. Regangan

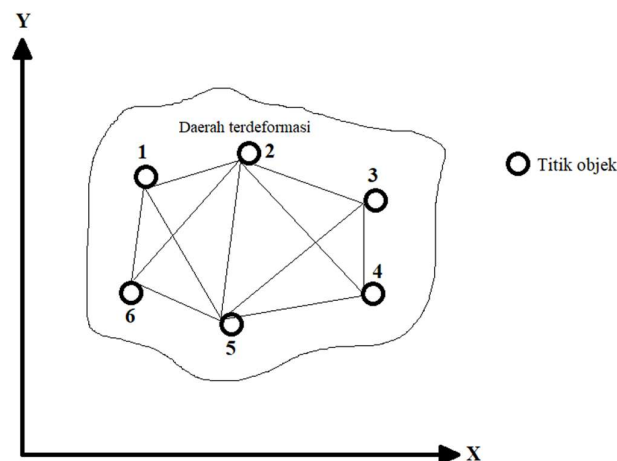
Regangan adalah pergeseran kedudukan yang terjadi per satuan panjang pada materi tertentu. Regangan biasanya digambarkan dengan tensor, yaitu suatu vektor yang memperhitungkan faktor waktu, sehingga regangan dapat menggambarkan gerakan yang bersifat dinamis.

Jadi, survei deformasi merupakan suatu kegiatan pengamatan geodetik untuk memperoleh parameter-parameter deformasi yang dapat berupa translasi, rotasi, dan regangan. Dalam pemantauan deformasi, terdapat dua jenis kerangka dasar yang biasa digunakan untuk pengukuran, yaitu kerangka dasar absolut dan kerangka dasar relatif. Kerangka dasar absolut mengikatkan titik pantau ke titik referensi terdekat yang terletak di luar area yang mengalami deformasi (Gambar I.1.), sedangkan kerangka dasar relatif merupakan jaring pengukuran bebas yang tidak menggunakan titik

referensi (Gambar I.2.). Semua titik yang digunakan pada kerangka dasar relatif berada di area yang terdeformasi.



Gambar I. 1. Kerangka dasar absolut (modifikasi dari Widjajanti, 2001)



Gambar I. 2. Kerangka dasar relatif (modifikasi dari Widjajanti, 2001)

Deformasi dapat terjadi baik secara horisontal maupun vertikal. Deformasi vertikal biasanya terjadi karena adanya penurunan tanah, aktivitas tektonik lempeng, dan faktor lain yang berasal dari alam. Oleh karena itu, deformasi vertikal berfokus pada respon perubahan kedudukan materi pada arah vertikal.

I.8.2. Pengukuran Beda Tinggi Metode Trigonometri

Salah satu metode untuk penentuan nilai beda tinggi antara satu titik dengan titik yang lain yaitu dengan pengukuran beda tinggi metode trigonometri. Pengukuran

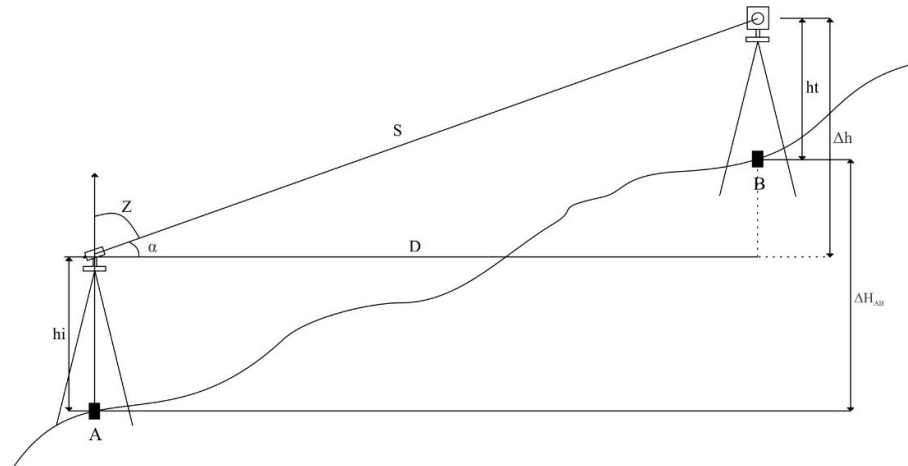


dilaksanakan dengan alat ukur teodolit atau TS dengan data yang diperoleh berupa sudut miring atau sudut vertikal dan jarak datar antara kedua titik (Basuki, 2011). Misalkan nilai beda tinggi yang dicari yaitu beda tinggi antara titik A dan titik B (ΔH_{AB}), maka nilai beda tinggi dapat diperoleh dengan persamaan (I.1) s.d. (I.3) (Parseno & Yulaikhah, 2010):

$$\Delta H_{AB} = h_i + \Delta h - h_t \dots\dots\dots (I.1)$$

$$\Delta h = S \sin \alpha = D \tan \alpha \dots\dots\dots (I.2)$$

$$\begin{aligned} H_B &= H_A + \Delta H_{AB} \\ &= H_A + h_i + \Delta h - h_t \dots\dots\dots (I.3) \end{aligned}$$



Gambar I. 3. Ilustrasi pengukuran beda tinggi metode trigonometrik (modifikasi dari Basuki, 2011)

Keterangan Gambar I.3.:

- Z : sudut zenith
- α : sudut *heling*
- S : jarak miring antara titik A dan B
- D : jarak mendatar antara titik A dan B
- h_t : tinggi target/prisma
- h_i : tinggi alat
- ΔH_{AB} : beda tinggi antara titik A dan B
- Δh : beda tinggi antara alat dan prisma

H_B : tinggi titik B

H_A : tinggi titik A

I.8.3. Hitung Perataan Kuadrat Terkecil

Hitung perataan kuadrat terkecil adalah proses hitungan statistik atau estimasi nilai parameter berdasarkan data pengamatan yang telah tersedia, yang selanjutnya disebut sebagai hitung perataan. Hitung perataan dilakukan apabila tersedia data pengamatan berlebih yang bertujuan untuk mendapatkan nilai tunggal. Hitung perataan menghitung suatu nilai akhir yang unik dengan metode tertentu sehingga jumlah kuadrat residunya ($V^T P V$) minimum (Hadiman, 1999). Terdapat beberapa metode yang biasa digunakan dalam perhitungan estimasi parameter yaitu hitung perataan metode parameter, metode kondisi, dan metode kombinasi.

I.8.4. Hitung Perataan Metode Kombinasi

Metode ini merupakan gabungan dari metode parameter dan metode kondisi. Nilai parameter tidak dihitung secara langsung namun melalui penyelesaian berdasarkan persamaan yang terdiri atas besaran ukuran. Hasil pengukuran merupakan fungsi parameter. Pada persamaan yang terbentuk, besaran ukuran saling terkait dan harus memenuhi syarat geometris dan matematis. Model fungsional pada metode kombinasi seperti pada persamaan (I.4) (Widjajanti, 2001):

$$F(L_a, X_a) = 0 \dots\dots\dots (I.4)$$

dengan L_a merupakan besaran estimasi terbaik dari hasil pengamatan dan X_a adalah nilai parameter yang dicari.

Model linierisasi pada metode kombinasi seperti pada persamaan (I.5):

$$BV + AX + W = 0 \dots\dots\dots (I.5)$$

Penyelesaian dengan bobot (P) menggunakan persamaan (I.6):

$$\Phi = V^T P V = V^T P V - 2K^T (BV + AX + W) = 0 \dots\dots\dots (I.6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = 2V^T P - 2K^T = 0$$

$$P^T V + B^T K = 0$$

$$V = P^{-1} B^T K \dots\dots\dots (I.7)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = -2K^T A = 0$$

$$-A^T K = 0 \dots\dots\dots (I.8)$$

Berdasar persamaan (I.5) dan (I.7) didapatkan persamaan (I.9):

$$K = - (BP^{-1}B^T)^{-1}(AX + W) \dots\dots\dots (I.9)$$

Berdasar persamaan (I.8) dan (I.9) didapatkan persamaan untuk mencari nilai parameter dan residu yaitu persamaan (I.10) dan (I.11):

$$X = - [A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}A]^{-1} [A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}W] \dots\dots\dots (I.10)$$

$$V = - P^{-1}B^T (BP^{-1}B^T)^{-1} (AX + W) \dots\dots\dots (I.11)$$

Nilai varian aposteriori dapat diperoleh dengan persamaan (I.12).

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{v^T PV}{n-u} \dots\dots\dots (I.12)$$

Matriks varian kovarian pengamatan hasil hitungan dapat diperoleh dengan hukum perambatan kesalahan acak sebagai berikut:

$$\Sigma La = \frac{\partial La}{\partial L} \Sigma L \left(\frac{\partial La}{\partial L} \right)^T$$

Dalam hal ini:

$$La = L - P^{-1} B^T (BP^{-1} B^T)^{-1} (AX + F(X^o, L))$$

$$\frac{\partial La}{\partial L} = I - P^{-1} B^T (BP^{-1} B^T)^{-1} B$$

Misal $(BP^{-1}B^T) = M$, maka diperoleh persamaan (I.13):

$$\Sigma La = \sigma_o^2 [P^{-1} - P^{-1} B^T (BP^{-1} B^T)^{-1} BP^{-1}] \dots\dots\dots (I.13)$$

Matriks varian kovarian parameter dan matriks varian kovarian residu dapat diperoleh dengan hukum perambatan kesalahan acak sebagai persamaan (I.14) dan (I.15):

$$\Sigma La = \frac{\partial x}{\partial L} \Sigma L \left(\frac{\partial x}{\partial L} \right)^T$$

$$\Sigma x = \sigma_o^2 [A^T (BP^{-1} B^T)^{-1} A]^{-1} \dots\dots\dots (I.14)$$

$$\Sigma v = \sigma_o^2 \{P^{-1} B^T (BP^{-1} B^T)^{-1} (B\Phi - A(A^T (BP^{-1} B^T)^{-1} A)^{-1} A^T (BP^{-1} B^T)^{-1} B\Phi)\} \dots\dots\dots (I.15)$$

Dalam hal ini:

$$\frac{\partial x}{\partial L} = -(A^T M^{-1} A)^{-1} (A^T M^{-1} B)$$

$$\Phi = \Sigma L^{-1}$$

I.8.5. Linierisasi Persamaan Pengamatan

Data ukuran berupa sudut dan jarak menghasilkan persamaan pengamatan tidak linier. Kedua persamaan tersebut perlu dilinierisasi menggunakan deret *Taylor* seperti pada persamaan (I.16) (Widjanti dkk., 2017):

$$F(x) = Lb + V = F(X_0) + \frac{\partial F(x)}{\partial (x)_{x=X_0}} X + \dots \dots \dots (I.16)$$

Dalam hal ini :

$F(x)$: nilai pengamatan

Lb : selisih nilai estimasi

V : residu

I.8.5.1. Linierisasi persamaan pengamatan *heling* dengan deret *Taylor*. *Heling* adalah sudut miring yang terbentuk antara dua titik terhadap arah datar. Bentuk geometrik dari pengukuran *heling* ditunjukkan pada Gambar I.3. Model matematis yang terbentuk dari pengamatan *heling* berdasarkan Gambar I.3. ditunjukkan pada persamaan (I.17).

$$F(x) = \tan \alpha - \frac{H_B - (H_A + h_i)}{D_{AB}} = 0 \dots \dots \dots (I.17)$$

Pada persamaan (I.17), α dan D_{AB} merupakan nilai ukuran, sehingga apabila persamaan (I.17) diturunkan terhadap nilai ukurannya, dapat diperoleh persamaan (I.18) dan (I.19):

$$\frac{\partial F(x)}{\partial \alpha} = \sec^2 \alpha \dots \dots \dots (I.18)$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial D_{AB}} = \frac{H_B - (H_A + h_i)}{D_{AB}^2} \dots \dots \dots (I.19)$$

I.8.6. Bobot

Bobot adalah perbandingan nilai ketelitian pengukuran secara relatif antara satu pengamatan terhadap pengamatan lainnya. Pemberian bobot dilakukan agar dapat mengontrol besarnya koreksi yang diberikan terhadap proses perataan dalam suatu pengamatan (Ghilani, 2010).

Nilai bobot dapat dinyatakan berbanding terbalik dengan nilai varian pengukurannya sehingga dapat dinyatakan dalam persamaan (I.20):

$$P_i = \frac{k}{\sigma_i^2} \dots \dots \dots (I.20)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum (\bar{X} - x_i)}{n-1} \dots \dots \dots (I.21)$$



Dalam hal ini:

σ_i^2 : varian pengukuran

\bar{x} : nilai rerata ukuran

x_i : ukuran ke- i

n : jumlah ukuran

Jika pengamatan tidak saling berkorelasi, maka bobot yang terbentuk merupakan matriks diagonal dengan bentuk matriks sebagai persamaan (I.22):

$$P = \hat{\sigma}_0^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{22}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{33}^2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (I.22)$$

Dalam hal ini:

P : bobot pengamatan

$\hat{\sigma}_0^2$: varian apriori

σ_{ii}^2 : varian pengukuran

I.8.6.1. Varian pengukuran sudut. Varian pengukuran sudut dibentuk dengan persamaan (I.23) (Mikhail & Gracie, 1981).

$$\sigma_B^2 = \sigma_{BC}^2 + \sigma_{BR}^2 + \sigma_{BP}^2 + \sigma_{BT}^2 \dots\dots\dots (I.23)$$

Dalam hal ini:

σ_B^2 : varian total sudut ukuran

σ_{BC} : kesalahan akibat pemusatan alat ukur dan target

σ_{BR} : kesalahan akibat pembacaan pada skala piringan horisontal

σ_{BP} : kesalahan akibat pembidikan

σ_{BT} : kesalahan akibat penempatan target

dengan :

$$\sigma_{BC}^2 = \left\{ \frac{\sigma_{C1}^2}{D_1^2} + \frac{\sigma_{C2}^2}{D_2^2} + \frac{\sigma_{C3}^2}{D_1^2 D_2^2} (D_1^2 + D_2^2 - 2D_1 D_2 \cos \beta) \right\} \rho^2 \dots\dots\dots (I.24)$$

Dalam hal ini:

σ_{C1}, σ_{C2} : kesalahan pemusatan target satu dan target dua

σ_{C3} : kesalahan pemusatan alat ukur

D_1, D_2 : jarak ke target satu dan target dua

β : sudut ukuran

ρ : 206265"

$\sigma_{BR}^2 = \sigma_R^2 / 2_n^2$ (untuk teodolit repetisi)

σ_R = 3 x d (ketelitian piringan horisontal 10" s.d. 1")

d : pembacaan terkecil piringan horisontal

$\sigma_{BP}^2 = \sigma_P^2 / n$

σ_P = 60"/M

M : perbesaran teropong alat ukur teodolit

n : jumlah pengamatan

$\sigma_{BT}^2 = \frac{D_1^2 + D_2^2}{D_1^2 D_2^2} \sigma_T^2 (\rho'')^2$

σ_T^2 : ketelitian target

I.8.6.2. Varian pengukuran jarak. Nilai varian pengukuran jarak harus ditentukan terlebih dahulu yang selanjutnya digunakan untuk menyusun matriks bobot.

Perhitungan nilai varian pengukuran jarak menggunakan persamaan (I.25) (Mikhail & Gracie, 1981):

$$\sigma_D^2 = a^2 + b^2 \cdot D^2 \dots \dots \dots (I.25)$$

Dalam hal ini:

σ_D^2 : varian total jarak pengukuran

a^2 : ketelitian jarak yang tidak tergantung jarak pengukuran (mm)

b^2 : ketelitian relatif alat (ppm)

D^2 : jarak (km)

I.8.7. Iterasi

Iterasi adalah suatu metode hitung berulang yang digunakan untuk menyelesaikan masalah hitungan matematis. Pada proses hitung perataan pada persamaan tidak linier diperlukan tahapan iterasi. Hal ini disebabkan persamaan tidak linier yang sudah dilinierisasi dengan deret *Taylor* akan mengabaikan pengaruh suku orde kedua dan seterusnya yang menyebabkan model matematis tidak terpenuhi (Widjajanti, dkk. 2017).

Iterasi pada hitung perataan dengan metode kombinasi dimulai dengan menentukan nilai dari parameter pendekatan yang baru (X_a) dan nilai ukuran (L_a) yang

setelahnya digunakan untuk hitung perataan selanjutnya. Nilai X_a dan L_a dapat diperoleh dengan persamaan (I.26) dan (I.27).

$$X = -(A^T M^{-1} A_0)^{-1} (A^T M^{-1} W)$$

$$V = -P^{-1} B_0^T K$$

$$X_a = X_0 + X \dots\dots\dots (I.26)$$

$$L_a = L_b + X \dots\dots\dots (I.27)$$

Proses iterasi dapat terus dilakukan hingga kriteria pemberhentian iterasi terpenuhi. Berikut adalah beberapa kriteria penghentian iterasi (Uotila, 1988):

1. X_i mendekati atau sama dengan nol (dengan nilai i yang semakin besar).
2. Selisih $V_i - V_{i-1}$ mendekati nol.
3. Nilai $V_i^T P V_i$ stabil.

I.8.8. Uji Statistik setelah Hitung Perataan

Uji statistik setelah hitung perataan dilakukan untuk mengetahui adanya kesalahan tak acak pada data hasil pengamatan. Pengujian statistik dilakukan terhadap nilai varian dan koreksi hasil pengamatan untuk rentang nilai kepercayaan tertentu. Uji statistik ini meliputi uji global dan data *snooping* (Nurrohmat & Heliani, 2005).

I.8.8.1. Uji global. Uji ini dilakukan terhadap semua data pengukuran setelah proses hitung perataan. Tujuan uji global yaitu untuk mengetahui keberadaan kesalahan tak acak yang mempengaruhi data pengukuran setelah hitung perataan. Uji global dilakukan dengan membandingkan nilai varian aposteriori dengan nilai varian apriori terhadap nilai distribusi tabel *Fisher* (Mikhail & Gracie, 1981). Tahapan uji global dimulai dengan penyusunan hipotesis seperti pada persamaan (I.28) dan (I.29).

$$H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2 \dots\dots\dots (I.28)$$

$$H_a : \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2 \dots\dots\dots (I.29)$$

Hipotesis nol (H_0) diterima jika memenuhi syarat pada persamaan (I.30):

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < F_{1-\alpha, f, \infty}^{1/2} \dots\dots\dots (I.30)$$

Dalam hal ini :

σ_0^2 : varian apriori

$\hat{\sigma}_0^2$: varian aposteriori

$F_{1-\alpha, f, \infty}^{1/2}$: nilai distribusi tabel *Fisher* dengan taraf uji α dan derajat kebebasan f

I.8.8.2. *Data snooping*. *Data snooping* dilakukan untuk mengetahui keberadaan kesalahan kasar (*blunder*) pada data pengukuran. Uji ini dilakukan setelah uji global, tepatnya apabila hipotesis nol (H_0) ditolak.

Persamaan hipotesis untuk uji ini sebagai berikut:

H_0 : hasil pengamatan ke- i tidak dipengaruhi kesalahan kasar.

H_a : hasil pengamatan ke- i dipengaruhi kesalahan kasar.

H_0 diterima apabila memenuhi syarat persamaan (I.31).

$$|w_i| \leq F_{1-\alpha_0, 1, \infty}^{1/2} \dots\dots\dots (I.31)$$

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \dots\dots\dots (I.32)$$

Dalam hal ini:

v_i : residu pengamatan ke- i

σ_{v_i} : simpangan baku residu ke- i

Penerimaan H_0 menunjukkan bahwa pengukuran ke- i tidak dipengaruhi kesalahan kasar, sehingga pengukuran tidak perlu dihilangkan atau diulang. Penolakan H_0 menunjukkan bahwa pengukuran ke- i dipengaruhi kesalahan kasar, sehingga pengukuran tersebut perlu dihilangkan atau diulang.

I.8.9. Pembentukan Model Persamaan Pergerakan Vertikal

Hasil proses hitung perataan yaitu nilai tinggi (Z) untuk setiap kala dan varian aposteriori dari masing-masing kala. Data tersebut bisa digunakan untuk masukan dalam analisis deformasi vertikal. Hitung analisis pergerakan vertikal dilakukan dengan membentuk persamaan pergerakan vertikal (Widjajanti, 2001). Besar nilai pergerakan diperoleh dari selisih nilai tinggi (Z) kedua kala pengukuran yang disajikan dalam persamaan (I.33):

$$dz = h_{kala}^2 - h_{kala}^1 \dots\dots\dots (I.33)$$

Dalam hal ini :

dz : nilai pergerakan vertikal

h_{kala}^1 : nilai tinggi kala I

h_{kala}^2 : nilai tinggi kala II

Nilai ketelitian dari nilai pergerakan vertikal ditunjukkan dengan besar nilai simpangan baku pergerakan vertikal. Nilai simpangan baku pergerakan vertikal dapat dinyatakan dengan persamaan (I.34):

$$s_{dz} = \sqrt{(s_{h\text{ kala}2})^2 + (s_{h\text{ kala}1})^2} \dots\dots\dots (I.34)$$

Dalam hal ini:

s_{dz} : simpangan baku pergerakan vertikal

$s_{h\text{ kala}1}$: simpangan baku nilai tinggi kala I

$s_{h\text{ kala}2}$: simpangan baku nilai tinggi kala II

I.8.10. Analisis Pergerakan Vertikal

Analisis pergerakan vertikal digunakan untuk menentukan nilai pergerakan vertikal dan analisis ada tidaknya pergerakan vertikal yang terjadi pada titik-titik pantau dengan uji statistik (Widjajanti, 2001). Data yang diperlukan dalam analisis ini yaitu data hasil hitung perataan terpisah dari setiap kala beserta nilai estimasi parameter dari setiap kala, nilai matriks kofaktor estimasi parameter setiap kala, dan nilai varian aposteriori setiap kala. Tahapan dari hitung analisis pergerakan vertikal ini yaitu uji signifikansi beda parameter, uji pergerakan titik pantau, dan penentuan kecepatan pergerakan vertikal titik pantau.

I.8.10.1. Uji signifikansi beda parameter. Uji signifikansi beda parameter digunakan untuk mengetahui adanya nilai perbedaan yang signifikan dari dua parameter. Uji ini dilakukan menggunakan nilai distribusi tabel *t-student* dengan nilai derajat kebebasan dan tingkat kepercayaan tertentu sebagai nilai pembandingnya. Analisis dalam tahap uji ini dilakukan dengan menghitung selisih kedua nilai parameter dengan akar kuadrat masing-masing simpangan bakunya. Pada penelitian ini uji signifikansi beda parameter digunakan untuk mengetahui signifikansi pergerakan vertikal dalam dua kala yang berbeda. Model matematisnya dapat disajikan dalam persamaan (I.35) (Widjajanti, 2010).

$$|T| = \frac{x_i - x_{ji}}{\sqrt{\sigma_{xi}^2 + \sigma_{xii}^2}} \dots\dots\dots (I.35)$$

Penerimaan untuk hipotesis nol (H_0) adalah sebesar $|T| < t_{f, \alpha/2}$

Dalam hal ini:

T : nilai hitung