



## INTISARI

### TELAAH MATEMATIS ALIRAN STOKASTIK PADA PERMUKAAN BOLA EKSOTIK

Oleh

NURFARISHA

13/353429/SPA/00478

Telah ditelaah konsep aliran stokastik isometrik yang berkaitan dengan persamaan diferensial stokastik Stratonovich pada permukaan bola, yaitu pada permukaan bola standar dan permukaan bola eksotik Gromoll-Meyer. Permukaan bola standar  $S_s^7$  dapat dibangun sebagai keragaman kuosien  $\text{Sp}(2, \mathbb{H})/S^3$  yang relatif terhadap aksi- $\bullet$  bagi  $S^3$ , sementara permukaan bola eksotik Gromoll-Meyer  $\Sigma_{GM}^7$  sebagai keragaman kuosien  $\text{Sp}(2, \mathbb{H})/S^3$  yang relatif terhadap aksi- $\star$  bagi  $S^3$ . Persamaan diferensial stokastik Stratonovich yang menggambarkan proses stokastik malar pada permukaan bola standar telah dibangun dan ditelaah. Proses stokastik malar yang sesuai beserta sifat-sifatnya pada permukaan bola eksotik Gromoll-Meyer dapat diperoleh dengan membangun suatu homeomorfisma  $h : S_s^7 \rightarrow \Sigma_{GM}^7$ . Perumusan persamaan Fokker-Planck dan laju perubahan entropi dalam pendekatan Stratonovich juga ditelaah.

Konsekuensi dari pemilihan struktur diferensial eksotik pada proses stokastik malar yang berlangsung pada ruang topologis  $S^{m+n+1}$  sebagai ruang keadaan proses itu juga telah diselidiki. Lebih tepatnya, telah ditelaah watak proses stokastik malar yang ruang keadaannya dipahami merupakan keragaman berdimensi- $(m+n+1)$  yang homeomorfik tetapi tidak harus difeomorfik dengan permukaan bola standar berdimensi- $(m+n+1)$ . Keragaman ini dibangun dari gabungan saling asing  $\mathbb{R}^{m+1} \times S^n \sqcup S^m \times \mathbb{R}^{n+1}$  dengan identifikasi setiap sepasang titiknya menggunakan peta  $u : \mathbb{R}^{m+1} \times S^n \rightarrow S^m \times \mathbb{R}^{n+1}$  yang dibangun dari difeomorfisma  $h_1 \times h_2 : S^m \times S^n \rightarrow S^m \times S^n$ . Apakah keragaman yang dihasilkan dari prosedur pengonstruksian di atas homeomorfik atau bahkan difeomorfik dengan permukaan bola standar  $S_s^{m+n+1}$  bergantung pada difeomorfisma  $h_1 : S^m \rightarrow S^m$  dan  $h_2 : S^n \rightarrow S^n$ . Ditinjau hanya kasus yang difeomorfisma  $h_1$  dan  $h_2$  menghasilkan keragaman yang setidaknya homeomorfik dengan permukaan bola standar. Difeomorfisma  $h_1$  dan  $h_2$ , oleh karena itu, dapat dianggap sebagai pembawa "keeksotikaan" pada keragaman yang dibangun. Untuk seluruh tujuan di atas, homeomorfisma  $h$  dari keragaman yang telah dibangun di atas ke (*onto*) permukaan bola standar secara eksplisit terkait dengan difeomorfisma  $h_1$  dan  $h_2$  yang telah dibangun. Homeomorfisma  $h$  mengidentifikasi secara topologis suatu ruang topologis atas keragaman yang dibangun di atas dengan permukaan bola



standar  $S_s^{m+n+1}$ . Dengan homeomorfisma  $h$  dan seluruh pemetaan yang terkait yang diperoleh dari  $h$  dan dinyatakan dalam notasi  $h_1$  dan  $h_2$  serta turunannya, dibangun proses stokastik malar atau aliran stokastik pada keragaman yang dibangun di atas yang sesuai dengan proses stokastik malar pada permukaan bola standar  $S_s^{m+n+1}$ . Proses stokastik malar yang dihasilkan dari pengonstruksian di atas pada keragaman yang dibangun dapat dipandang sebagai proses stokastik malar yang sama pada  $S_s^{m+n+1}$  tetapi digambarkan oleh struktur diferensial eksotik pada  $S^{m+n+1}$ .

**Kata-kata kunci:** Proses stokastik malar, persamaan diferensial stokastik Stratonovich, aliran stokastik isometrik, persamaan Fokker-Planck, laju perubahan entropi sistem yang berperilaku stokastik, permukaan bola eksotik Gromoll-Meyer, homeomorfisma.



## ABSTRACT

### MATHEMATICAL STUDY OF THE STOCHASTIC FLOWS ON THE EXOTIC SPHERES

By

NURFARISHA

13/353429/SPA/00478

We studied isometric stochastic flows of a Stratonovich stochastic differential equation on spheres, i.e. on the standard sphere and Gromoll-Meyer exotic sphere. The standard sphere  $S_s^7$  can be constructed as the quotient manifold  $\text{Sp}(2, \mathbb{H})/S^3$  with respect to the so-called  $\bullet$ -action of  $S^3$ , whereas the Gromoll-Meyer exotic sphere  $\Sigma_{GM}^7$  as the quotient manifold  $\text{Sp}(2, \mathbb{H})/S^3$  with respect to the so-called  $\star$ -action of  $S^3$ . The Stratonovich stochastic differential equation which describes a continuous-time stochastic process on the standard sphere is constructed and studied. The corresponding continuous-time stochastic process and its properties on the Gromoll-Meyer exotic sphere can be obtained by constructing a homeomorphism  $h : S_s^7 \rightarrow \Sigma_{GM}^7$ . The corresponding Fokker-Planck equation and entropy rate in the Stratonovich approach is also investigated.

The consequences of the choice of exotic differential structure on continuous-time stochastic processes taking place on the topological space  $S^{m+n+1}$  as state space of the processes have been investigated. More precisely, we have investigated the properties of continuous-time stochastic processes where the state spaces of the continuous time stochastic processes under consideration are  $(m+n+1)$ -dimensional manifolds which are homeomorphic but not necessarily diffeomorphic to standard  $(m+n+1)$ -dimensional sphere. The manifolds have been constructed from disjoint union  $\mathbb{R}^{m+1} \times S^n \sqcup S^m \times \mathbb{R}^{n+1}$  by identifying every pair of its points using a map  $u : \mathbb{R}^{m+1} \times S^n \rightarrow S^m \times \mathbb{R}^{n+1}$  which is constructed from a diffeomorphism  $h_1 \times h_2 : S^m \times S^n \rightarrow S^m \times S^n$ . Whether a manifold which is yielded from the above procedure of construction is homeomorphic or even diffeomorphic to the standard sphere  $S_s^{m+n+1}$  depends on the diffeomorphism  $h_1 : S^m \rightarrow S^m$  and  $h_2 : S^n \rightarrow S^n$ . We considered only the cases where the diffeomorphisms  $h_1$  and  $h_2$  lead to the manifolds which are at least homeomorphic to a standard sphere. The diffeomorphisms  $h_1$  and  $h_2$ , therefore, can be regarded as the carriers of the "exoticism" of the constructed manifolds. For all of the above purposes, homeomorphisms  $h$  from the above-constructed manifolds onto the standard sphere explicitly in term of the diffeomorphisms  $h_1$  and  $h_2$  have been constructed. The homeomorphisms  $h$  topologically identifies the topo-



logical spaces of the above-constructed manifolds with the standard sphere  $S_s^{m+n+1}$ . Using the homeomorphisms  $h$  and all their associated maps derived from them and expressed in terms of  $h_1$  and  $h_2$  as well as their derivatives, we construct the continuous-time stochastic processes or flows on the above-constructed manifolds corresponding to stochastic processes on the standard sphere  $S_s^{m+n+1}$ . The continuous-time stochastic processes yielded from the above construction on the constructed manifolds can be regarded as the same continuous-time stochastic processes on  $S_s^{m+n+1}$  but described in exotic differential structures on  $S^{m+n+1}$ .

**Keywords:** Continuous-time stochastic process, Stratonovich stochastic differential equation, isometric stochastic flows, Fokker-Planck equation, entropy rate, Gromoll-Meyer exotic sphere, homeomorphism.