



UNIVERSITAS  
GADJAH MADA

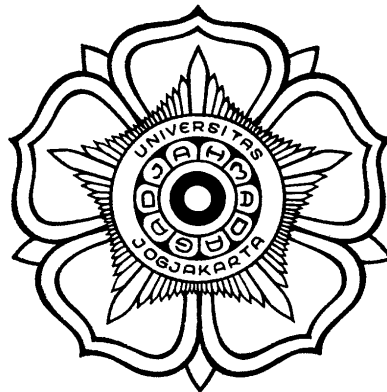
**Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran**  
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD  
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari <http://etd.repository.ugm.ac.id/>

# **MODEL LINEAR PARSIAL DENGAN KESALAHAN PENGUKURAN**

**TESIS**

**Untuk memenuhi sebagian persyaratan  
Mencapai derajat Sarjana S-2**

**Program Studi Matematika  
Jurusan Ilmu-ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam**



**Diajukan oleh :**

**WIBAWATI  
16562/I-4/1238/01**

**Kepada  
PROGRAM PASCASARJANA  
UNIVERSITAS GADJAH MADA  
YOGYAKARTA**

**2003**



**Tesis**

**MODEL LINEAR PARSIAL  
DENGAN KESALAHAN PENGUKURAN**

dipersiapkan dan disusun oleh

**WIBAWATI**

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji

pada tanggal : 15 Oktober 2003

**Susunan Dewan Penguji**

Pembimbing Utama

Anggota Dewan Penguji Lain

Prof. Drs. H. Subanar, Ph.D.  
NIP. 130 515 731

Prof. Drs. Suryo Guritno, M.Stats., Ph.D.  
NIP. 130 367 311

Dr. Sri Haryatmi, M.Sc.  
NIP. 130 531 466

Tesis ini telah diterima sebagai salah satu persyaratan  
untuk memperoleh gelar Magister

Tanggal 01 NOV 2003



Dr. Sri Wahyuni, MS

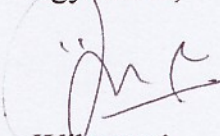
Pengelola Program Studi : Matematika



## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam tesis ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka

Yogyakarta,



Wibawati



## INTISARI

### Model Linear Parsial Dengan Kesalahan Pengukuran

oleh

**Wibawati**

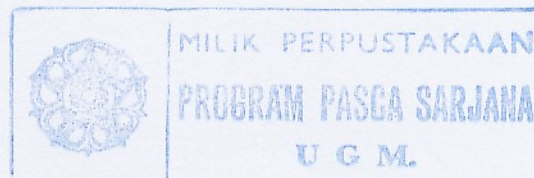
**Di bawah bimbingan Prof. H. Subanar, Ph.D**

Diberikan suatu model linear parsial dengan kesalahan pengukuran dari  $n$  sampel :  $Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$ , dimana  $X_i$  diukur dengan kesalahan. Sebagai pengganti pengamatan  $X_i$ , diamati :  $W_i = X_i + U_i$ , Dengan  $U_i$  i.i.d, independen dengan  $(Y_i, X_i, T_i)$  dengan mean 0 dan matriks kovariansinya  $\Sigma_{UU}$  diketahui. Sehingga model menjadi  $Y_i = W_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$  \*.  $W_i^T \beta$  merupakan bagian parametrik dan  $g(T_i)$  merupakan bagian nonparametrik.

Fungsi  $g(t)$  diestimasi dengan estimator Nadaraya Watson dan metode kuadrat terkecil digunakan untuk mengestimasi komponen parametrik. Sifat asimtotis estimator  $\hat{\beta}_n$  dan  $\hat{g}(t)$  diturunkan menggunakan beberapa Lemma. Contoh penggunaan metode ini dilakukan dengan studi simulasi dengan paket program matlab.

---

**Kata Kunci :** *kesalahan pengukuran, model linear parsial, regresi nonparametrik, fungsi kernel*





## ABSTRACT

### Partially Linear Model With Measurement Error

by

**Wibawati**

**Under the Supervision of Prof. H. Subanar, Ph.D**

Given  $n$  observation partially linear model with measurement error  $Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$ , when  $X_i$  are measured with error. Instead of observing  $X_i$ , we observe  $W_i = X_i + U_i$ .  $U_i$  i.i.d, independent of  $(Y_i, X_i, T_i)$  with mean zero and covariance matrix  $\Sigma_{UU}$  is known. And then the model can be written as  $Y_i = W_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$ .  $W_i^T \beta$  is parametric part and  $g(t_i)$  is nonparametric part.

The function  $g(t)$  is derived by using Nadaraya Watson estimator, and the least square method is used for estimate parametric part. Asymptotic properties of  $\hat{\beta}_n$  and  $\hat{g}(t)$  are investigated by using some lemma. The example of this method, will be illustrated by a simulation study. Matlab software is used for this.

---

**Key Words :** *measurement error, partially linear models, nonparametric regression, kernel function.*

## **BAB I**

### **PENDAHULUAN**

#### **1.1. Latar Belakang**

Analisis regresi merupakan metode statistik yang mempelajari pola hubungan antara variabel independen  $X$  dan variabel dependen  $Y$ . Istilah “regresi” diperkenalkan oleh Sir Francis Galton (1822-1911) yang berkaitan dengan penemuannya, hubungan tinggi badan anak ( $Y$ ) dan tinggi badan orang tuanya ( $X$ ) (Draper Smith, 1981). Ada dua metode yang dapat digunakan, yaitu regresi parametrik dan nonparametrik.

Jika terdapat  $n$  pengamatan saling bebas  $(X_i, Y_i)$ ,  $i=1,2,3,\dots,n$ , persamaan regresi dinyatakan sebagai berikut :

$$Y_i = g(X_i) + \varepsilon_i, i=1,2,3,\dots,n \quad (1.1)$$

Dengan  $g$  fungsi regresi tidak diketahui,  $\varepsilon_i$ ,  $i=1,2,3,\dots,n$  merupakan variabel kesalahan random.

Model regresi dengan menganggap bahwa bentuk fungsi  $g(\cdot)$  diketahui disebut model regresi parametrik, sedangkan jika bentuk fungsi  $g(\cdot)$  tidak diketahui disebut model regresi nonparametrik.

Pada pendekatan nonparametrik akan lebih fleksibel untuk mencari kurva estimator yang sesuai dengan data karena model tidak ditentukan lebih dahulu seperti pada model parametrik.

Jika sebagian variabel random independen mempunyai hubungan fungsional dengan variabel respon dalam bentuk spesifikasi tertentu, sedangkan variabel



independen lainnya mempunyai hubungan fungsional dalam bentuk fungsional tidak tertentu, maka digunakan pendekatan dengan model linear parsial. Dengan model  $Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$ .  $X_i$  dan  $T_i$  merupakan vektor variabel penjelas, yang merupakan titik design tidak random (fixed). Fungsi  $g$  merupakan fungsi yang tidak diketahui dan  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$  merupakan parameter tidak diketahui,  $\varepsilon_i$ ,  $i=1,2,3,\dots,n$  merupakan kesalahan random dengan mean 0 dan variansi tetap (pola homoskedastisitas).

Pada kasus model linear parsial dengan kesalahan pengukuran yaitu kovariat  $X_i$  diukur dengan kesalahan, sebagai pengganti pengamatan  $X_i$ , diamati :

$$W_i = X_i + U_i$$

Dimana kesalahan ukuran  $U_i$  i.i.d, independen dengan  $(Y_i, X_i, T_i)$  dengan mean 0 dan matriks kovariansinya  $\Sigma_{UU}$  diasumsikan diketahui.

## 1.2. Permasalahan

Permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan estimasi parameter dan sifat normalitas asimtotis  $\hat{\beta}_n$  pada model linear parsial dengan kesalahan pengukuran

## 1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini adalah menentukan estimasi parameter dan sifat normalitas asimtotis  $\hat{\beta}_n$  pada model linear parsial dengan kesalahan pengukuran.



#### **1.4. Tinjauan Pustaka**

Dalam praktek, penerapan dari model linear parsial banyak sekali. Engle, Granger, Rice dan Weiss (1966), yang pertama kali menggunakan model ini. Mereka menganalisa hubungan antara temperatur dan penggunaan listrik.

Speckman (1988) menerapkan model linear parsial pada percobaan obat kumur.

Sedangkan untuk model dengan kesalahan pengukuran telah diteliti oleh Fuller (1987), Carrol, Rupper and Stefanskim (1995). Andrew Chesher (1991) meneliti tentang efek dsri kesalahan pengukuran.

Green, Jennison dan Seheult (1985), Goa (1992) telah mempelajari sifat-sifat asimtotis dari estimator dengan kuadrat terkecil pada kasus design titik non random

Engle, Grangeerm Rice dan Weiss (1986), Heckman (1996), rice (1986) Whaba (1990), Green dan Silverman (1994) dan Eubank, Kambour, Kim, Klipple, reese dan Schimek (1998) menggunakan teknik penghalusan untuk penakasiran parameter.

## BAB II

### PENGERTIAN DASAR

#### 2.1. Regresi Parametrik

Analisis regresi merupakan metode statistik yang mempelajari pola hubungan antara variabel independen  $X$  dan variabel dependen  $Y$ . Diberikan  $n$  pasangan pengamatan  $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ . Pandang model regresi :

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.1)$$

Dimana  $Y_i$  merupakan variabel respon,  $X_i$  variabel prediktor dan  $\varepsilon_i$  kesalahan random, dengan asumsi tidak berkorelasi dan mean 0.

Asumsi pada regresi parametrik adalah bentuk fungsi regresi  $m(\cdot)$  diketahui, kecuali untuk sejumlah berhingga parameter yang tidak diketahui, yaitu ada vektor parameter  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$  dan ada fungsi  $m(\cdot; \beta)$  sehingga  $m(\cdot) = m(\cdot; \beta)$ . Fungsi regresi  $m(\cdot; \beta)$ , dapat berbentuk linear dalam parameter ataupun non linear. Fungsi disebut non linear jika minimal non linear dalam satu parameter. Dan disebut linear jika terdapat fungsi diketahui  $f_1, f_2, \dots, f_p$  sedemikian hingga  $m(x) = \sum_{j=1}^p \beta_j f_j(x_i)$ . Akan tetapi dalam tulisan ini dibatasi pada model yang linear saja. Sehingga jika terdapat  $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ , pengamatan, maka model akan menjadi :

$$Y_i = \sum_{j=1}^p \beta_j f_j(x_i) + \varepsilon_i; \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.2)$$

Model diatas jika dituliskan dalam notasi matriks akan menjadi :

$$Y = Xb + e$$



Dimana  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ,  $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$  dan  $\mathbf{e} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)^T$ , dengan asumsi  $\epsilon_i \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ .

Dengan model (2.2), untuk mengestimasi  $\mathbf{b}$  ekuivalen dengan mengestimasi koefisien-koefisien regresi yaitu  $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$ .

Ada beberapa metode panaksiran parameter regresi, salah satunya metode kuadrat terkecil. Metode ini meminimalkan  $\mathbf{e}^T \mathbf{e}$  terhadap  $\mathbf{b}$ . Dari persamaan diatas :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{e}$$

Maka  $\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b}$

Sehingga

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b}) = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}^T \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{b}$$

$$\nabla_{\mathbf{b}} \mathbf{e}^T \mathbf{e} / \nabla_{\mathbf{b}} = 0 - 2\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{b} = 0$$

maka  $-2\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{b} = 0$  sehingga  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{b} = \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{Y}) \tag{2.3}$$

Karena  $\nabla_{\mathbf{b}}^2 \mathbf{e}^T \mathbf{e} / \nabla_{\mathbf{b}} \nabla_{\mathbf{b}}^T = 2\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  merupakan matriks definit positif, maka  $\hat{\mathbf{b}}$  akan meminimumkan  $\mathbf{e}^T \mathbf{e}$  dan  $\hat{\mathbf{b}}$  dinamakan estimator kuadrat terkecil untuk  $\mathbf{b}$ .

Dengan sifat estimator tersebut :

1.  $\hat{\mathbf{b}}$  merupakan penaksir yang tak bias untuk  $\mathbf{b}$
2.  $\text{Var}(\hat{\mathbf{b}}) = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$
3.  $\hat{\mathbf{b}}$  merupakan penaksir terbaik, yang berarti diantara semua panaksir linear takbias untuk  $\mathbf{b}$ ,  $\hat{\mathbf{b}}$  mempunyai variansi minimal.

## 2.2. Regresi Non Parametrik

Motode regresi nonparametrik mulai dikenal sejak abad XIX. Namun perkembangannya tidak begitu pesat dibanding dengan pendekatan parametrik. Namun seiring dengan perkembangan bidang komputasi, regresi nonparametrik mengalami perkembangan yang begitu pesat.

Untuk  $n$  pasangan pengamatan  $\{(T_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ , diberikan model regresi nonparametrik sebagai berikut :

$$Y_i = g(T_i) + \varepsilon_i, i=1,2,3,\dots,n \quad (2.4)$$

Dimana  $Y_i$  merupakan variabel respon,  $T_i$  variabel prediktor dan  $\varepsilon_i$  kesalahan random, dengan asumsi tidak berkorelasi dan mean 0.

Dalam regresi nonparametrik tidak ada asumsi tentang bentuk fungsi regresi  $g(\cdot)$ . Hal ini memberikan *flexibilitas* yang lebih besar didalam bentuk yang mungkin dari fungsi regresi. Untuk mengkonstruksi model regresi nonparametrik terlebih dahulu dipilih ruang fungsi yang sesuai, dimana fungsi regresi  $g(\cdot)$  diyakini termasuk didalamnya. Pemilihan ruang fungsi ini biasanya dimotivasi oleh sifat kelicinan yang diasumsikan dimiliki oleh fungsi regresi.

Ada beberapa teknik untuk mengestimasi fungsi regresi  $g(\cdot)$ , salah satunya adalah dengan estimator kernel. Sebagai contoh estimator kernel untuk fungsi regresi  $g(\cdot)$  :

$$\hat{g}_n(t) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(t - T_i) Y_i}{n^{-1} \sum_{j=1}^n K_h(t - T_j)}$$

dimana  $h$  : lebar pita (*bandwidth*);  $K_h(t)=h^{-1}K(t/h)$ , dan  $K$  disebut fungsi kernel



### 2.2.1. Fungsi Kernel

Diberikan suatu sampel random  $X_i, i=1,2,3,\dots,n$  iid. Karakteristik dasar yang menggambarkan kalakuan dari suatu variabel random adalah fungsi densitas  $f$  dari sampel random tersebut. Berdasarkan sampel random ini akan diestimasi fungsi densitas  $f$  yang tidak diketahui dengan pendekatan kernel. Kernel  $K$  didefinisikan (Hardle, 1990) :

$$K_h(t) = \frac{1}{h} K\left(\frac{t}{h}\right)$$

dengan  $h$  adalah *bandwidth*. Fungsi densitas  $f$  diestimasi dengan :

$$\hat{f}_h(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(t - T_i) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - T_i}{h}\right) \quad (2.5)$$

#### Definisi 2.1.

Kernel  $K$  adalah fungsi bernilai real, kontinyu, terbatas, simetri dan integralnya

sama dengan 1.  $\int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt = 1$  dan  $\int_{-\infty}^{\infty} t K(t)dt = 0$

Beberapa fungsi kernel (Hardle1990) :

Uniform	$\frac{1}{2} I( u  \leq 1)$
Triangle	$(1 -  u ) I( u  \leq 1)$
Epanechnikov	$\frac{3}{4} (1 - u^2) I( u  \leq 1)$
Quartic	$\frac{15}{16} (1 - u^2)^2 I( u  \leq 1)$
Triweight	$\frac{35}{32} (1 - u^2)^3 I( u  \leq 1)$
Gaussian	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} u^2)$
Cosinus	$\frac{\pi}{4} \text{Cos}(\frac{\pi}{4} u) I( u  \leq 1)$



Dari definisi kernel diatas maka :  $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_h(t) dt = 1$

**Bukti :**

Ambil  $s_i = \frac{t - T_i}{h} \rightarrow s_i h = t - T_i$  dan  $dt = h ds_i$ , sehingga persamaan (2.5)

menjadi :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_h(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(t - T_i) dt = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K(s_i) h ds_i = \frac{1}{n} \left[ n \int_{-\infty}^{\infty} K(s_i) ds_i \right] = 1.$$

Estimator kernel untuk fungsi densitas bersama variabel random T dan Y diperoleh dengan kernel multiplikatif :

$$\hat{f}_{h_1 h_2}(t, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) K_{h_2}(y - Y_i) \quad (2.6)$$

**Lemma 2.1**

Jika  $\hat{f}_{h_1 h_2}(t, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) K_{h_2}(y - Y_i)$  maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \hat{f}_{h_1 h_2}(t, y) dy = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) Y_i \quad (2.7)$$

**Bukti :**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y \hat{f}_{h_1 h_2}(t, y) dy &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) \int_{-\infty}^{\infty} y K_{h_2}(y - Y_i) dy \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{h_2} K\left(\frac{y - Y_i}{h_2}\right) dy \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) \int_{-\infty}^{\infty} (s_i h_2 + Y_i) K(s_i) ds_i, \quad \text{subt : } y = Y_i + s_i h_2 \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) Y_i \end{aligned}$$



Selanjutnya estimator kernel untuk model regresi nonparametrik  $Y_i = g(T_i) + \varepsilon_i$

Dikonstruksikan sebagai berikut :

$$\text{Kurva regresi : } g(t) = E(Y|T = t) = \frac{\int yf(t, y)dy}{f(t)} \quad (2.8)$$

dimana  $f(t,y)$  merupakan fungsi densitas bersama  $(T,Y)$  dan  $f(t)$  fungsi densitas marginal untuk  $T$ .

Estimator natural untuk  $g(t)$  adalah dengan mengganti pembilang dan penyebut pada persamaan (2.8), (2.5) dan (2.7) dengan mengambil *bandwidth* yang sama yaitu  $h$ , maka diperoleh :

$$\hat{g}_n(t) = \frac{\int y\hat{f}_{h1h2}(t, y)dy}{\hat{f}_h(t)}$$
$$\hat{g}(t) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(t-T_i)Y_i}{n^{-1} \sum_{j=1}^n K_h(t-T_j)} = n^{-1} \sum_{i=1}^n W_{ni}(t)Y_i \quad (2.9)$$

$$\text{dengan } W_{ni}(t) = \frac{K_h(t-T_i)}{n^{-1} \sum_{j=1}^n K_h(t-T_j)}$$

Persamaan (2.9) telah di temukan oleh Nadaraya (1964) dan Watson (1964). Oleh karena itu estimator ini sering disebut “Estimator Nadaraya Watson”.

Karena persamaan (2.9) tergantung pada nilai  $h$ , maka nilai-nilai ekstrim untuk  $h$  mengakibatkan :



- Anggap estimator kernel hanya dihitung pada pengamatan  $\{T_i : i=1,2,\dots,n\}$

$$\text{Maka jika } h \rightarrow 0, \hat{g}_n(T_i) \rightarrow \frac{K(0)Y_i}{K(0)} = Y_i$$

Jadi *bandwidth* ( $h$ ) sangat kecil, estimator akan menuju ke data

- Jika  $h \rightarrow \infty$  maka  $K\left(\frac{t-T_i}{h}\right) \rightarrow K(0)$ , akibatnya

$$\hat{g}_n(T_i) \rightarrow \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n K(0)Y_i}{n^{-1} \sum_{i=1}^n K(0)} = \frac{n^{-1} K(0) \sum_{i=1}^n Y_i}{n^{-1} (nK(0))} = n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i = \bar{Y}$$

Jadi *bandwidth* ( $h$ ) sangat besar, estimator akan sangat mulus dan menuju rata-rata dari variabel respon.

Jika diambil  $\omega_{ni}(t) = \frac{K_h(t-T_i)}{\sum_{j=1}^n K_h(t-T_j)}$  maka estimator  $g(t)$  ekuivalen dengan :

$$\hat{g}(t) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(t-T_i)Y_i}{n^{-1} \sum_{j=1}^n K_h(t-T_j)} = \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)Y_i$$

### 2.3. MODEL LINEAR PARSIAL

Model Linear Parsial merupakan gabungan dari regresi parametrik dan regresi nonparametrik. Model linear parsial mengasumsikan data  $\{(X_i, T_i, Y_i) : i=1,2,\dots,n\}$  mempunyai bentuk :

$$Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i. \quad (2.10)$$



$X_i$  dan  $T_i$  merupakan vektor variabel penjelas, yang merupakan titik design tidak random (fixed).  $g$  merupakan fungsi yang tidak diketahui dan  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$  merupakan parameter tidak diketahui,  $\varepsilon_i$ ,  $i=1,2,3,\dots,n$  merupakan kesalahan random dengan mean 0 dan variansi tetap (pola homoskedastisitas).  $X_i^T \beta$  merupakan komponen parametrik, dimana estimasinya dilakukan dengan metode Least Square.  $g(T_i)$  merupakan komponen nonparametrik, dimana estimasinya menggunakan estimator kernel.

### 2.3.1 Estimasi parameter

Dalam model linear parsial pada persamaan (2.10),  $g$  dan  $\beta$  merupakan fungsi dan parameter yang akan diestimasi dari data. Estimasi  $g$  menggunakan estimator kernel dan  $\beta$  menggunakan metode kuadrat terkecil.

Jadi  $\beta$  adalah parameter sebenarnya, persamaan (2.10) dapat dinyatakan sebagai :

$$Y_i - X_i^T \beta = g(T_i) + \varepsilon_i \quad (2.11)$$

Jika  $Y_i^* = Y_i - X_i^T \beta$ , maka dengan menggunakan teori regresi diperoleh :

$$g(t) = E(Y^* | T = t) = \frac{\int y^* g(t, y^*) dy^*}{g(t)} \quad (2.12)$$

Untuk fungsi densitas bersama  $g(t, Y^*)$  diestimasi dengan pergandaan kernel



$$\begin{aligned}\hat{g}_{hh_2}(t, y^*) &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) K_{h_2}(y^* - Y_i^*) \\ \int y^* \hat{g}_{hh_2}(t, y^*) dy^* &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) \int \frac{y^*}{h_2} K\left(\frac{y^* - Y_i^*}{h_2}\right) dy^* \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) \int (sh_2 + Y_i^*) K(s) ds \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) Y_i^*\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh :

$$\hat{g}_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(t - T_i) Y_i^*}{\sum_{j=1}^n K_h(t - T_j)} = \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t) (Y_i - X_i^T \beta) \quad (2.13)$$

dimana :

$$\omega_{ni}(t) = \frac{K_h(t - T_i)}{\sum_{j=1}^n K_h(t - T_j)} = \frac{K\left(\frac{t - T_i}{h}\right)}{\sum_{j=1}^n K\left(\frac{t - T_j}{h}\right)}$$

Selanjutnya  $\hat{g}_n(t)$  menggantikan  $g(t)$  pada persamaan (2.10), sehingga didapatkan model estimasi sebagai berikut :

$$Y_i = X_i^T \beta + \hat{g}(T_i) + \varepsilon_i \quad (2.14)$$

Berdasarkan model diatas, dengan menggunakan metode kuadrat terkecil diperoleh taksiran  $\beta$  dengan meminimumkan  $\varepsilon' \varepsilon$  sebagai berikut :



$$\begin{aligned}
\varepsilon^T \varepsilon &= \sum_{i=1}^n [Y_i - X_i^T \beta - \hat{g}_n(T_i)]^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \left[ Y_i - X_i^T \beta - \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i)(Y_j - X_j^T \beta) \right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \left[ Y_i - X_i^T \beta - \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) Y_j + \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) X_j^T \beta \right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \left[ \left( Y_i - \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) Y_j \right) - \left( X_i^T - \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) X_j^T \right) \beta \right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (\tilde{Y}_i - \tilde{X}_i^T \beta)^2 = (\tilde{Y} - \tilde{X} \beta)^T (\tilde{Y} - \tilde{X} \beta) \\
&= \tilde{Y}^T \tilde{Y} - \beta^T \tilde{X}^T \tilde{Y} - \tilde{Y}^T \tilde{X} \beta + \beta^T \tilde{X}^T \tilde{X} \beta
\end{aligned}$$

Karena  $\beta^T \tilde{X}^T \tilde{Y} = (\beta^T \tilde{X}^T \tilde{Y})^T = \tilde{Y}^T \tilde{X} \beta$ , maka persamaan menjadi :

$$\varepsilon^T \varepsilon = \tilde{Y}^T \tilde{Y} - 2\beta^T \tilde{X}^T \tilde{Y} + \beta^T \tilde{X}^T \tilde{X} \beta \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \varepsilon^T \varepsilon}{\partial \beta} = 0$$

maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
-2\tilde{X}^T \tilde{Y} + \tilde{X}^T \tilde{X} \hat{\beta}_n &= 0 \\
\tilde{X}^T \tilde{Y} &= \tilde{X}^T \tilde{X} \hat{\beta}_n
\end{aligned} \quad (2.16)$$

Persamaan diatas merupakan persamaan normal. Dengan asumsi matriks  $\tilde{X}$  mempunyai rank penuh maka persamaan (2.16) mempunyai persamaan tunggal :

$$\hat{\beta}_n = (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \tilde{Y} \quad (2.17)$$

Karena  $\frac{\partial^2 \varepsilon^T \varepsilon}{\partial \beta \partial \beta^T} = 2\tilde{X}^T \tilde{X}$  merupakan matriks definit positif maka  $\hat{\beta}_n$  merupakan

estimator kuadrat terkecil untuk  $\beta$ , dengan

$$\tilde{X}_i = \left[ X_i - \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) X_j \right]$$



$$\tilde{Y}_i = \left[ Y_i - \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) Y_j \right]$$

$$\tilde{Y}^T = (\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots, \tilde{Y}_n)$$

$$\tilde{X}^T = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n)$$

Setelah mendapatkan  $\hat{\beta}_n$ , maka  $\beta$  pada persamaan (2.13) diganti dengan  $\hat{\beta}_n$ , untuk menghitung  $\hat{g}_n(t)$ .

$$\hat{g}_n(t) = \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)(Y_i - X_i^T \hat{\beta})$$

### 2.3.2. Sifat Asimtotik Estimator

Untuk mendapatkan sifat-sifat asimtotik estimator diperlukan beberapa definisi, teorema dan asumsi berikut :

**Definisi 2.2.** (Rudin, W, 1976)

Fungsi  $g$  dikatakan kontinyu di  $x$  bila untuk setiap  $\epsilon > 0$  terdapat  $\delta > 0$  sedemikian hingga untuk setiap  $y$  dalam domain fungsi dengan  $|x-y| < \delta$  berlaku  $|g(x)-g(y)| < \epsilon$

**Definisi 2.3.** (Pfeffer, W.F, 1993)

Fungsi  $g$  dikatakan kontinyu Lipschitz pada  $[a,b]$  bila terdapat konstanta  $M > 0$  sedemikian hingga  $|g(x)-g(y)| < M|x-y|$  untuk setiap  $x,y$  dalam  $[a,b]$



### Definisi 2.4

#### Konvergen Dalam Probabilitas (Casella, Berger, 1990)

Barisan variabel random  $X_1, X_2, X_3, \dots$  konvergen dalam probabilitas ke suatu variabel random  $X$  jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$  atau

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1 \quad \text{atau biasa ditulis } X_n \xrightarrow{P} X \text{ atau } X_n \xrightarrow{L} X$$

### Definisi 2.5.

#### Konvergen Hampir Pasti (Casella, Berger, 1990)

Barisan variabel random  $X_1, X_2, X_3, \dots$  konvergen hampir pasti ke suatu variabel random  $X$ , jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$ ,  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| < \varepsilon) = 1$  atau biasa ditulis

$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$$

### Definisi 2.6.

#### Konvergen Dalam Distribusi (Casella, Berger, 1990)

Barisan variabel random  $X_1, X_2, X_3, \dots$  konvergen dalam distribusi ke suatu variabel random  $X$ , jika  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$  pada setiap titik  $x$  dimana  $F_X(x)$  kontinyu.

Atau biasa ditulis  $X_n \xrightarrow{d} X$

### Teorema 2.1.

#### Strong Law of Large Number (Casella, Berger, 1990)

Jika  $X_i, i=1,2,\dots$  variabel random i.i.d. dengan mean  $\mu < \infty$ , maka



$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu \quad \text{untuk } n \rightarrow \infty$$

### **Teorema 2.2.**

#### **Weak Law of Large Number** (Casella, Berger, 1990)

Jika  $X_i, i=1,2,\dots$  variabel random i.i.d. dengan mean  $\mu < \infty$ , maka

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu \quad \text{untuk } n \rightarrow \infty$$

#### **Definisi 2.7.** (Serfling, R.J, 1980)

Barisan  $\{a_n\}$  dan  $\{b_n\}$  dinyatakan sebagai  $a_n = O(b_n)$  jika terdapat bilangan real  $M$

sedemikian sehingga  $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| = M$

#### **Definisi 2.8.** (Serfling, R.J, 1980)

Barisan  $\{a_n\}$  dan  $\{b_n\}$  dinyatakan sebagai  $a_n = o(b_n)$  jika  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

Dengan sifat dari “O” :

- jika  $a_{n1} = O(b_{n1}), a_{n2} = O(b_{n2})$  maka  $a_{n1} + a_{n2} = O(b_{n1} + b_{n2})$
- jika  $\alpha > 0$  adalah konstanta,  $a_n = O(\alpha b_n)$  maka  $a_n = O(b_n)$
- jika  $a_{n1} = O(b_{n1}), a_{n2} = O(b_{n2})$  maka  $a_{n1} \cdot a_{n2} = O(b_{n1} \cdot b_{n2})$



Jika  $f(x)$  dan  $g(x)$  adalah fungsi dengan  $g(x) > 0$ , sifat-sifat dari  $O(\cdot)$  dan  $o(\cdot)$ ,

(Rohatgi, 1976):

- $f_1(x) = O[g_1(x)], f_2(x) = O[g_2(x)] \Rightarrow f_1(x) + f_2(x) = O [g_1(x) + g_2(x)]$
- $\alpha > 0$  adalah konstanta,  $f(x) = O[\alpha g(x)] \Rightarrow f(x) = O[g(x)]$
- $f_1(x) = O[g_1(x)], f_2(x) = O[g_2(x)] \Rightarrow f_1(x) \cdot f_2(x) = O [g_1(x) \cdot g_2(x)]$
- $f(x) = o[g(x)] \Rightarrow f(x) = O [g(x)]$
- $f_1(x) = O[g_1(x)], f_2(x) = o[g_2(x)] \Rightarrow f_1(x) \cdot f_2(x) = o [g_1(x) \cdot g_2(x)]$

**Definisi 2.9.** (Serfling, R.J, 1980)

Barisan  $\{a_n\}$  dan  $\{b_n\}$  dinyatakan sebagai  $a_n = O_p(b_n)$  jika terdapat bilangan real

$M$  dan  $N$  sedemikian sehingga  $P\left\{\left|\frac{a_n}{b_n}\right| > M\right\} \leq \varepsilon, \quad \forall n > N$

**Definisi 2.10.** (Serfling, R.J, 1980)

Barisan  $\{a_n\}$  dan  $\{b_n\}$  dinyatakan sebagai  $a_n = o_p(b_n)$  jika untuk semua  $\varepsilon > 0$

sedemikian sehingga  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$

**Teorema 2.3 Teorema Limit Pusat** (Casella, Berger, 1990)

Misalkan  $X_i, i=1,2,\dots$  variabel random i.i.d. yang mempunyai mgf ( $M_x(t)$ ) ada untuk  $|t| < h$ , untuk beberapa  $h$  positif. Misal  $E(x_i) = \mu$  dan  $\text{var}(x_i) = \sigma^2$ .



Didefinisikan  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $G_n(x)$  merupakan fungsi distribusi kumulatif dari

$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$ . Maka untuk sembarang  $x$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy, \text{ yaitu } \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma \text{ berdistribusi normal}$$

standart.

**Teorema 2.4** (Sen, P.K dan Singer,1993)

Jika  $\{X_i\}$  merupakan vektor random i.i.d pada  $\mathbb{R}^p$  dengan mean  $\mu_i$  dan matriks kovarian  $\Sigma_i$ , maka :

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma), \Sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \Sigma_i$$

**Teorema 2.5.** (Sen, P.K dan Singer,1993)

Jika  $Z \sim N(\mu, \Omega)$  dan A adalah suatu matriks, maka vektor  $U = AZ \sim N(A\mu, A\Omega A^T)$

Jika komponen  $X_i = (X_{ij})$ . Didefinisikan :  $h_j(T_i) = E(X_{ij} | T_i)$  dan  $V_i = X_i - E(X_i | T_i)$

$$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$$

**Asumsi 1.**

$\sup_{0 \leq t \leq 1} E \|X_1\|^4 | T = t < \infty$  dan  $B = E(V_1 V_1^T)$  adalah matriks definit positif

Jika  $(X_i, T_i)$  adalah titik rancangan tetap, ada fungsi kontinyu yang didefinisikan pada  $[0,1]$  sedemikian hingga masing-masing komponen  $X_i$  memenuhi :

$$X_i = h_j(T_i) + V_i, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p \quad (2.18)$$



Dengan  $\{V_i\}$  adalah barisan bilangan real yang memenuhi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i V_i^T = B \quad (2.19)$$

dan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k V_i \right| < \infty \quad (2.20)$$

dengan  $V_i = (V_{i1}, \dots, V_{ip})^T$ ,  $a_n = n^{1/2} \log n$  dan  $B$  matriks definit positif

### Asumsi 2.

$g(\cdot)$  dan  $h(\cdot)$  kontinyu Lipschitz

**Asumsi 3.** Fungsi bobot  $\omega_{ni}(\cdot)$  memenuhi :

$$\text{i). } \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) = O_p(1)$$

$$\text{ii). } \max_{1 \leq i, j \leq n} \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(T_j) = O_p(b_n)$$

$$\text{iii). } \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) I(|T_j - T_i| > c_n) = O_p(c_n)$$

dimana  $b_n = n^{-2/3} \log n$  dan  $c_n = n^{-1/3} \log n$ .

### Lemma 2.2.

Jika asumsi 1,2,3 dipenuhi maka  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X} = B$



### 2.3.2.1. Sifat kenormalan

Dari lemma 2.2 dengan B adalah matriks definit positif, maka  $\tilde{X}^T \tilde{X} = O(n)$ , artinya terdapat bilangan real  $M_1$ , sedemikian hingga :

$$\frac{1}{n} (\tilde{X}^T \tilde{X}) \leq M_1 \quad (2.21)$$

dengan  $E(\tilde{X}^T \varepsilon) = 0$  dan  $\text{Var}(\tilde{X}^T \varepsilon) = \sigma^2 \tilde{X}^T \tilde{X}$

Menurut pertidaksamaan Chebyshev, yaitu jika variabel random dengan mean  $\mu$  dan variansi berhingga  $\nabla \delta$  berlaku :

$$P[|Z - \mu| \geq \delta] \leq E \left[ \frac{(Z - \mu)^2}{(\delta)^2} \right] \quad (2.22)$$

dipilih  $\delta = n^{1/2} M_2$  pada persamaan (2.22) dan menggunakan pertidaksamaan (2.21) terhadap variabel random  $\tilde{X}^T \varepsilon$ , maka untuk setiap  $M_2 > 0$  berlaku :

$$P \left[ |\tilde{X}^T \varepsilon - 0| \geq n^{1/2} M_2 \right] \leq \left[ \frac{\sigma^2 (\tilde{X}^T \tilde{X})}{n M_2^2} \right] \leq \sigma^2 \frac{M_1}{M_2^2}$$

$$\text{atau } P \left[ |n^{-1/2} \tilde{X}^T \varepsilon| \geq M_2 \right] \leq \sigma^2 \frac{M_1}{M_2^2} \quad (2.23)$$

jika untuk sebarang  $\varepsilon_1 > 0$  dipilih  $M_2$  sehingga  $\sigma^2 \frac{M_1}{M_2^2} \leq \varepsilon_1$  maka

$$M_2 \geq \sqrt{\frac{\sigma^2 M_1}{\varepsilon_1}} = \sigma \left( \frac{M_1}{M_2^2} \right)^{1/2}$$

Sehingga persamaan (2.23) dapat ditulis menjadi :

$$P \left[ |n^{-1/2} \tilde{X}^T \varepsilon| \geq M_2 \right] \leq \varepsilon_1 \quad (2.24)$$



berdasarkan definisi 2.9 dan 2.10 order dalam probabilitas maka pertidaksamaan

(2.24) menjadi  $\tilde{X}^T \varepsilon = O_p(n^{1/2})$  atau dinyatakan sebagai :

$$\tilde{X}^T \varepsilon = o_p(n) \quad (2.25)$$

Akan diselidiki distribusi asimtotis dari  $n^{-1/2} \tilde{X}^T \varepsilon$  dengan menggunakan teorema

2.4. Untuk menerapkan teorema limit pusat terhadap  $n^{-1/2} \tilde{X}^T \varepsilon$ , dimisalkan  $\tilde{X}_i$

vektor  $p \times 1$  yaitu baris ke- $i$  dari matriks  $\tilde{X}$  dan  $Z_i = \tilde{X}_i \varepsilon_i$ , maka :

$$\text{Var}(Z_i) = V_i = \sigma^2 \tilde{X}_i \tilde{X}_i^T$$

$$\begin{aligned} \Sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 \tilde{X}_i \tilde{X}_i^T \\ &= \sigma^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X} = \sigma^2 B \end{aligned}$$

$$\text{Jadi} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{X}^T \varepsilon \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 B) \quad (2.26)$$

Persamaan  $Y_i = X_i^T \beta + \hat{g}(t_i) + \varepsilon_i$  dapat dipandang sebagai  $\tilde{Y} = \tilde{X} \beta + \varepsilon$  sehingga

dperoleh :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_n &= (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \tilde{Y} \\ \hat{\beta}_n &= (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T (\tilde{X} \beta + \varepsilon) \\ \hat{\beta}_n &= (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \tilde{X} \beta + (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon \\ \hat{\beta}_n &= \beta + (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\text{Atau} \quad \hat{\beta}_n - \beta = (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon$$



Kemudian dihitung :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) &= \sqrt{n}(\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon \\
 &= n \frac{1}{\sqrt{n}} (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon \\
 &= n (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \frac{\tilde{X}^T \varepsilon}{\sqrt{n}} \\
 &= \left( \frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X} \right)^{-1} \frac{\tilde{X}^T \varepsilon}{\sqrt{n}} \tag{2.28}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (2.26) maka persamaan (2.28) menjadi

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{d} B^{-1}Z \text{ dimana } Z \sim N(0, \sigma^2 B) \tag{2.29}$$

Dengan menggunakan teorema (2.5), maka untuk persamaan (2.29), jika  $Z \sim N(0, \sigma^2 B)$  maka  $B^{-1}Z \sim N(0, \sigma^2 B^{-1}BB^{-1})$ , sehingga

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 B^{-1}) \tag{2.30}$$

### 2.3.2.2. Sifat Konsisten

Estimator kuadrat terkecil  $\hat{\beta}_n$  konsisten untuk  $\beta$  artinya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \hat{\beta}_n - \beta \right| < \varepsilon \right) = 1 \text{ atau bisa dituliskan } \text{plim } \hat{\beta}_n = \beta.$$

Dari persamaan (2.27)

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_n &= \beta + (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon \\
 \hat{\beta}_n &= \beta + \left( \frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X} \right)^{-1} \frac{1}{n} \tilde{X}^T \varepsilon \\
 \text{p lim } \hat{\beta}_n &= \beta + \text{p lim} \left( \frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X} \right)^{-1} \frac{1}{n} \tilde{X}^T \varepsilon
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} p \lim \hat{\beta}_n &= \beta + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X} \right)^{-1} p \lim \frac{1}{n} \tilde{X}^T \varepsilon \\ p \lim \hat{\beta}_n &= \beta + B^{-1} \cdot 0 \quad \text{dari lemma 2.3 dan persamaan 2.25} \\ p \lim \hat{\beta}_n &= \beta \end{aligned}$$

### 2.3.3. Pemilihan Bandwith

Wahba (1975), Craven dan Wahba (1979) dan Golub, Heath dan Wahba (1979) telah memperkenalkan kriteria pemilihan *Bandwith* ( $h$ ) yang optimal dengan menggunakan kriteria GCV (Generalized Cross-Validation) :

$$GCV(h) = RSS(h)/[1-n^{-1}tr(A(h))]^2$$

Dari persamaan (2.10),  $Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$ ,  $i=1,2,3,\dots,n$ , dinyatakan dalam bentuk matriks :

$$Y = X\beta + g + e \quad (2.31)$$

Didefinisikan  $\hat{Y}$  adalah estimator dari  $E(Y)$  yang bergantung pada  $h$  yaitu :

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= X\hat{\beta}_n + \hat{g} \\ &= X\hat{\beta}_n + W(Y - X\hat{\beta}_n) \\ &= X\hat{\beta}_n + WY - WX\hat{\beta}_n \\ &= WY + (1-W)X\hat{\beta}_n \\ &= WY + \tilde{X}\hat{\beta}_n \end{aligned}$$

Didefinisikan  $\hat{Y} = A(h)Y$ ,  $GCV(h) = RSS(h)/[1-n^{-1}tr(A(h))]^2$

$RSS(h)$  merupakan rata-rata jumlah kuadrat error

$$RSS(h) = n^{-1} \|Y - \hat{Y}\|^2 = n^{-1} \|Y - A(h)Y\|^2 = n^{-1} \|(I - A(h))Y\|^2 \quad (2.32)$$



Sehingga :

$$A(h)Y = \hat{Y}$$

$$A(h)Y = WY + \tilde{X}\hat{\beta}_n \quad (\text{dikalikan dengan } Y^{-1})$$

$$A(h) = W + \tilde{X}\hat{\beta}_n Y^{-1}$$

$$A(h) = W + \tilde{X}(\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \tilde{Y} Y^{-1}$$

$$A(h) = W + \tilde{X}(\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T (I - W) Y Y^{-1}$$

$$A(h) = W + \tilde{X}(\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T (I - W)$$

$$\text{Jadi } A(h) = W + P_{\tilde{X}}(I - W), \quad P_{\tilde{X}} = \tilde{X}(\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T$$

Dengan nilai GCV yang minimal akan didapatkan nilai *bandwidth* yang optimal

**BAB III**

**MODEL LINEAR PARSIAL**

**DENGAN KESALAHAN PENGUKURAN**

**3.1. Estimasi Parameter b dan Fungsi g(.)**

Diketahui suatu model linear parsial dari n sampel :  $Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$

Dimana kovariat  $X_i$  diukur dengan kesalahan. Sebagai pengganti pengamatan  $X_i$ , diamati :

$$W_i = X_i + U_i \quad (3.1)$$

Dimana ukuran error  $U_i$  i.i.d, independen dengan  $(Y_i, X_i, T_i)$  dengan mean 0 dan matriks kovariansinya  $\Sigma_{UU}$ . Diasumsikan  $\Sigma_{UU}$  diketahui.

Dari persamaan (2.10) dan (3.1) didapatkan :

$$\begin{aligned} Y_i &= X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i \\ &= W_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i - U_i^T \beta \\ &= W_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i^* \end{aligned} \quad (3.2)$$

Untuk  $\beta$  diketahui sebagai parameter yang benar maka dapat dicari estimasi fungsi  $g(.)$ , dari persamaan (3.2) :

$$Y_i - W_i^T \beta = g(T_i) + \varepsilon_i^* \quad (3.3)$$

Model (3.3) dapat dipandang sebagai model regresi nonparametrik dengan respon  $Y_i - W_i^T \beta$ , dari sub bab 2.2 diperoleh :

$$\hat{g}(t) = \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T)(Y_j - W_j^T \beta) \quad (3.4)$$



Dalam kasus ini diasumsikan bahwa  $\varepsilon_i$  mempunyai mean 0 dan variansi tetap  $\sigma^2$ .

Berarti  $E\{Y_i - X_i^T\beta - g(T_i)\}^2 = \sigma^2$ , sehingga :

$$\begin{aligned} E\{Y_i - W_i^T\beta - g(T_i)\}^2 &= E\{Y_i - X_i^T\beta - U_i^T\beta - g(T_i)\}^2 \\ &= E\{Y_i - X_i^T\beta - g(T_i)\}^2 + E(U_i^T\beta)^2 \\ &= E\{Y_i - X_i^T\beta - g(T_i)\}^2 + \beta^T \Sigma_{UU}\beta \\ &= \sigma^2 + \beta^T \Sigma_{UU}\beta \end{aligned}$$

Persamaan (3.3) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\begin{aligned} Y_i - W_i^T\beta &= g(T_i) + \varepsilon_i^* \\ Y_i - W_i^T\beta &= \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i)(Y_j - W_j^T\beta) + \varepsilon_i^* \\ Y_i - W_i^T\beta &= \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i)Y_j - \omega_{nj}(T_i)W_j^T\beta + \varepsilon_i^* \\ Y_i - \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i)Y_j &= [W_i - \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i)W_j]^T\beta + \varepsilon_i^* \\ \tilde{Y}_i &= \tilde{W}_i^T\beta + \varepsilon_i^* \end{aligned}$$

$$\text{Dengan MSE} = \hat{\sigma}^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{Y}_i - \tilde{W}_i^T\hat{\beta})^2}{n}$$

Karena  $\sigma^2 = \sigma^{*2} - \beta^T \Sigma_{UU}\beta$  maka  $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^{*2} - \hat{\beta}^T \Sigma_{UU}\hat{\beta}$

$$\text{Sehingga : } \hat{\sigma}_n^2 = n^{-1} \sum_i (\tilde{Y}_i - \tilde{W}_i^T\hat{\beta}_n)^2 - \hat{\beta}_n^T \Sigma_{UU}\hat{\beta}_n \quad (3.5)$$

Dari estimasi  $\sigma^2$  pada persamaan (3.5), akan digunakan untuk menentukan estimasi  $\beta$  sebagai berikut :



$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \left( \tilde{Y}_i - \tilde{W}_i^T \hat{\beta}_n \right)^2 - \hat{\beta}_n^T \Sigma_{UU} \hat{\beta}_n \\ \hat{\sigma}^2 &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \left( \tilde{Y}_i \tilde{Y}_i - 2 \tilde{Y}_i \tilde{W}_i^T \hat{\beta}_n + \left( \tilde{W}_i^T \hat{\beta}_n \right)^2 \right) - \hat{\beta}_n^T \Sigma_{UU} \hat{\beta}_n \\ \hat{\sigma}^2 &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \left( \tilde{Y}_i \tilde{Y}_i - 2 \tilde{Y}_i \tilde{W}_i^T \hat{\beta}_n + \tilde{W}_i^T \hat{\beta}_n \hat{\beta}_n^T \tilde{W}_i \right) - \hat{\beta}_n^T \Sigma_{UU} \hat{\beta}_n \\ \frac{\partial \hat{\sigma}^2}{\partial \hat{\beta}_n} &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \left( 0 - 2 \tilde{Y}_i \tilde{W}_i^T + 2 \tilde{W}_i^T \tilde{W}_i \hat{\beta}_n \right) - 2 \Sigma_{UU} \hat{\beta}_n \\ 0 &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \left( 0 - 2 \tilde{Y}_i \tilde{W}_i^T + 2 \tilde{W}_i^T \tilde{W}_i \hat{\beta}_n \right) - 2 \Sigma_{UU} \hat{\beta}_n \\ 0 &= n^{-1} \left( -2 \tilde{W}^T \tilde{Y} + 2 \tilde{W}^T \tilde{W} \hat{\beta}_n \right) - 2 \Sigma_{UU} \hat{\beta}_n \\ \tilde{W}^T \tilde{W} \hat{\beta}_n - n \Sigma_{UU} \hat{\beta}_n &= \tilde{W}^T \tilde{Y} \\ \hat{\beta}_n &= \left( \tilde{W}^T \tilde{W} - n \Sigma_{UU} \right)^{-1} \left( \tilde{W}^T \tilde{Y} \right)\end{aligned}$$

Diperoleh :

$$\frac{\partial^2 \hat{\sigma}^2}{\partial \hat{\beta}_n \hat{\beta}_n^T} = n^{-1} 2 \tilde{W}^T \tilde{W} - 2 \Sigma_{UU} = 2B + 2 \Sigma_{UU} - 2 \Sigma_{UU} = 2B$$

Menurut Asumsi 1, B matriks definit positif, karena B merupakan matriks kovariansi dari  $X - E(X | T)$ . maka  $\hat{\beta}_n$  merupakan penaksir yang meminimalkan MSE

Jadi Estimasi dari  $\beta$  :

$$\hat{\beta}_n = \left( \tilde{W}^T \tilde{W} - n \Sigma_{UU} \right)^{-1} \tilde{W}^T \tilde{Y} \quad (3.6)$$

Setelah mendapatkan  $\hat{\beta}_n$ , maka  $\beta$  pada persamaan (3.4) diganti dengan  $\hat{\beta}_n$ , untuk menghitung  $\hat{g}_n(t)$ .

$$\hat{g}_n(t) = \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T) (Y_j - W_j^T \hat{\beta}_n)$$

### 3.2. Sifat Normalitas Asimtotis Untuk Bagian Parametrik

Untuk membahas sifat asimtotis dibutuhkan beberapa pengertian, asumsi dan lemma berikut :

#### Ketidaksamaan Abel :

Barisan bilangan  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  ( $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ ) merupakan barisan bilangan real. Maka :

$$b_1 \left( \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k a_i \right) \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq b_1 \left( \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k a_i \right)$$

#### Asumsi 4.

$$E(\epsilon_i) = E(U_i) = 0 \text{ dan } \sup_i E(\epsilon_i + ||U_i||^4) < \infty$$

#### Lemma A1.

Apabila asumsi 1-4 dipenuhi, maka :

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| G_j(T_i) - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) G_j(T_k) \right| = O_p(c_n), j=1,2,3,\dots,p$$

$$G_0(\cdot) = g(\cdot) \text{ dan } G_l(\cdot) = h_l(\cdot), l=1,2,3,\dots,p$$

Dengan menggunakan asumsi 2, 3 (iii) dan ketidaksamaan Abel, akan dibuktikan Lemma A1 untuk  $g(\cdot)$ .



**Bukti :**

$$\begin{aligned} g(T_i) - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i)g(T_k) &= g(T_i) \left\{ 1 - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i)g(T_i) \right\} + \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) \{g(T_i) - g(T_k)\} \\ &= \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) \{g(T_i) - g(T_k)\} I(|T_i - T_k| > c_n) + \\ &\quad \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) \{g(T_i) - g(T_k)\} I(|T_i - T_k| \leq c_n) + \\ &\quad g(T_i) \left\{ 1 - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i)g(T_i) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} \left| g(T_i) - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i)g(T_k) \right| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) \{g(T_i) - g(T_k)\} I(|T_i - T_k| > c_n) \right| + \\ &\quad \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) \{g(T_i) - g(T_k)\} I(|T_i - T_k| \leq c_n) \right| + \\ &\quad \max_{1 \leq i \leq n} \left| g(T_i) \left\{ 1 - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i)g(T_i) \right\} \right| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |g(T_i) - g(T_k)| \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) I(|T_i - T_k| > c_n) \right| + \\ &\quad \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) \right| \max_{1 \leq i \leq n} |g(T_i) - g(T_k) I(|T_i - T_k| \leq c_n)| + \\ &\quad \max_{1 \leq i \leq n} |g(T_i)| \max_{1 \leq i \leq n} \left| \left\{ 1 - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i)g(T_i) \right\} \right| \\ &= O(n^{-1/3} \log n) + O(n^{-1/3} \log n) = O(n^{-1/3} \log n) \end{aligned}$$

Dengan demikian Lemma terbukti .  $\ddot{y}$

**Lemma A2.**

Apabila Asumsi 1-4 dipenuhi, maka :

$$n^{-1} \tilde{X}^T \tilde{X} = B + o_p(1)$$



**Bukti :**

Didefinisikan :  $\bar{h}_{ns}(T_i) = h_s(T_i) - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i)X_{ks}$ ,  $X_{js} = h_s(T_j) + V_{js}$  elemen

ke(s,m) dari  $\tilde{X}^T \tilde{X}$  (s,m = 1,2,3,...,p) adalah :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n X_{js} X_{jm} &= \sum_{j=1}^n V_{js} V_{jm} + \sum_{j=1}^n \bar{h}_{ns}(T_j) V_{jm} + \sum_{j=1}^n \bar{h}_{nm}(T_j) V_{js} + \sum_{j=1}^n \bar{h}_{ns}(T_j) \bar{h}_{nm}(T_j) \\ &= \sum_{j=1}^n V_{js} V_{jm} + \sum_{j=1}^n R_{nsm}^{(q)} \end{aligned}$$

Dengan SLLN maka  $\sum_{i=1}^n V_i V_i^T = B + o_p(1)$ , dan Lemma A1, berarti

$R_{nsm}^{(3)} = o_p(n)$ , dengan Lemma A1 dan ketidaksamaan Cauchy-Schwarz :

$R_{nsm}^{(1)} = o_p(n)$  dan  $R_{nsm}^{(2)} = o_p(n)$ .

**Lemma A.3** (Ketidaksamaan Bernstein).

Misalkan  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  variabel random saling bebas dengan mean 0 dan range terbatas:  $|\Gamma_i| \leq M$ . Untuk setiap  $\eta > 0$ ,

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^n \Gamma_i\right| > \eta\right\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{\eta^2}{2\left[\sum_{i=1}^n \text{var}(\Gamma_i) + M\eta\right]}\right\}$$

Dinotasikan :  $e'_j = e_j I(|e_j| \leq n^{1/4})$  dan  $e''_j = e_j - e'_j = e_j I(|e_j| > n^{1/4})$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

**Lemma A.4.**

Apabila asumsi 1-4 dipenuhi, maka

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) e_k \right| = o_p\{n^{-2/5} \log(n)\}$$



**Bukti :**

Ditetapkan  $L > 0$  yang berdasarkan kenyataannya besar. Misalkan

$$B_{nL} = \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n ?_{nj}(T_i) \leq L, \max_{1 \leq i, j \leq n} ?_{nj}(T_i) \leq Lb_n \right\}$$

Kemudian

$$\begin{aligned} & P \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n ?_{nj}(T_i) \mathbf{e}_j \right| > n^{-2/5} \log(n) \right\} \leq P\{I(B_{nL}) = 0\} \\ & + P \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n \mathbf{w}_{nj}(T_i) \mathbf{e}_j \right| > n^{-2/5} \log(n), I(B_{nL}) = 1 \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Karena berdasarkan asumsi 1.3  $P\{I(B_{nL}) = 1\}$  dapat dibuat menjadi kecil dengan memilih  $L$  yang cukup besar, hal itu mencukupi untuk menunjukkan bahwa syarat kedua dalam (3.7) konvergen ke nol untuk setiap  $L$ .

Aplikasi ketidaksamaan Bernstein ke (3.7) begitu rumit berdasarkan kenyataan bahwa syarat-syarat  $\omega_{nj}(T_i)$  dan  $I(B_{nL}) = 1$  adalah acak. Pertama kita kondisikan pada syarat-syarat ini dan akan tidak bersyarat kemudian. Untuk  $C$  yang cukup besar, pertama diberikan :

$$\begin{aligned} & P \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n \mathbf{w}_{nj}(T_i) \{ \mathbf{e}'_j - E(\mathbf{e}'_j) \} \right| > Cn^{-2/5} \log(n) \mid \{ \mathbf{w}_{nj}(T_i) \}, I(B_{nL}) = 1 \right\} \\ & \leq \sum_{i=1}^n P \left\{ \left| \sum_{j=1}^n \mathbf{w}_{nj}(T_i) \{ \mathbf{e}'_j - E(\mathbf{e}'_j) \} \right| > Cn^{-2/5} \log(n) \mid \{ \mathbf{w}_{nj}(T_i) \}, I(B_{nL}) = 1 \right\} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan ketidaksamaan Bernstein dengan  $h = Cn^{-2/5} \log(n)$  dan  $M = 2Lb_n n^{1/4}$ . Kemudian pada sisi sebelah kanan dari bentuk yang terakhir dibatasi dengan



$$2I(B_{nL}) \sum_{i=1}^n \exp \left\{ - \frac{C^2 n^{-4/5} \log^2(n)}{4LCb_n n^{1/4-2/5} \log(n) + 2 \sum_{j=1}^n \mathbf{w}_{nj}^2(T_i) \text{var}(\mathbf{e}'_j)} \right\} \quad (3.8)$$

Dengan  $b_n = n^{-4/5}$  dan  $\text{var}(\mathbf{e}'_j) < \infty$ . Pada persamaan bahwa  $I(B_{nL}) = 1$ , dengan

demikian diperoleh :

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{w}_{nj}^2(T_i) \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{w}_{nj}(T_i) \max_{1 \leq i, j \leq n} \mathbf{w}_{nj}(T_i) \leq L^2 b_n$$

Hal menandakan bahwa (3.8) dibatasi dengan  $2nI(B_{nL}) \exp\{-(C/L)\log(n)\} \leq n^{-3/2}$  untuk  $C$  yang cukup besar. Karena ekspresi terakhir independen terhadap  $\{\omega_{nj}(T_i)\}$  kecuali melewati  $I(B_{nL})$ , kita mempunyai

$$P \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n \mathbf{w}_{nj}(T_i) \{\mathbf{e}'_j - E(\mathbf{e}'_j)\} \right| > Cn^{-2/5} \log(n) \mid I(B_{nL}) = 1 \right\} \leq n^{-3/2}$$

Ini menunjukkan bahwa

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n \mathbf{w}_{nj}(T_i) \{\mathbf{e}'_j - E(\mathbf{e}'_j)\} \right| = o_p \{n^{-2/5} \log(n)\} \quad (3.9)$$

Untuk  $V_n = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \mathbf{w}_{nj}(T_i) \{\mathbf{e}''_j - E(\mathbf{e}''_j)\}$ . Misalkan  $p$  dan  $q$  seperti berikut :

$1 \leq p < 2$ ,  $1/p + 1/q = 1$  dan  $1/q < 2/5 - 1/4$ . Dengan ketidaksamaan Hölder,

$$|V_n| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n \mathbf{w}_{nj}^q(T_i) \right\}^{1/q} \left\{ \sum_{j=1}^n |\mathbf{e}''_j - E(\mathbf{e}''_j)|^p \right\}^{1/p}$$

Dengan asumsi 3.(ii),  $\mathbf{w}_{nj}^q(T_i) = O_p(b_n^q)$  sehingga

$\sum_j \mathbf{w}_{nj}^q(T_i) = O_p(nb_n^q) = O_p(n^{1-4q/5})$  dan dengan demikian

$$|V_n| \leq O_p \{n^{(1-4q/5)/q}\} \left\{ \sum_{j=1}^n |\mathbf{e}''_j - E(\mathbf{e}''_j)|^p \right\}^{1/p}$$



Lebih jelasnya,

$$n^{-1} \sum_{j=1}^n \left[ |\mathbf{e}_j'' - E(\mathbf{e}_j'')|^p - E\{|\mathbf{e}_j'' - E(\mathbf{e}_j'')|^p\} \right] = o_p(1) \quad (3.10)$$

dengan ketidaksamaan Hölder,

$$E|\mathbf{e}_j''|^p = E\left\{|\mathbf{e}_j|^p I(\mathbf{e}_j > n^{1/4})\right\} \leq \left(E|\mathbf{e}_j|^4\right)^{p/4} \{P(|\mathbf{e}_j| > n^{1/4})\}^{1-p/4}$$

dimana dengan ketidaksamaan Chebychev yang dibatasi oleh

$\leq n^{-1+p/4} (E|\mathbf{e}_j|^4)^{p/4}$ . Oleh karena itu :

$$\sum_{j=1}^n E|\mathbf{e}_j'' - E(\mathbf{e}_j'')|^p = Op(n^{p/4}) \quad (3.11)$$

Dengan substitusi (3.11) kedalam (3.10), diperoleh :

$$\sum_{j=1}^n |\mathbf{e}_j'' - E(\mathbf{e}_j'')|^p = Op(n^{p/4})$$

Berdasarkan kenyataan bahwa  $1/q < 2/5 - 1/4$ , kita dapatkan bahwa

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \mathbf{w}_{nj}(T_i) \{\mathbf{e}_j'' - E(\mathbf{e}_j'')\} = Op(n^{(1-4q/5)/q+1/4}) = op(n^{-2/5}).$$

**Lemma A.5.** Apabila asumsi 1 – 4 dipenuhil, maka :

$$\sum_{i=1}^n U_i \tilde{g}_i = o_p(n^{1/2});$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \tilde{g}_i = o_p(n^{1/2})$$

Perlakuan yang sama jika  $g(T_i)$  digantikan dengan  $h_j(T_i)$ .



**Bukti :**

Akan dibuktikan hanya langkah pertama, sedangkan langkah-langkah yang lainnya mengikuti dengan cara yang sama. Misalkan  $\xi_n = n^{1/2} / \log(n)$

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n U_i \tilde{g}_i\right| > \xi_n\right) \leq P\left(\left|\sum_{i=1}^n U_i \tilde{g}_i\right| > \xi_n, \max_i |\tilde{g}_i| \leq c_n \log n\right) + P\left(\max_i |\tilde{g}_i| > c_n \log n\right)$$

Dengan Lemma A1 bentuk kedua adalah  $o_P(1)$ . Untuk bentuk pertama, misalkan  $r_i$  adalah kejadian  $|\tilde{g}_i| > c_n \log n$ . Kemudian

$$\begin{aligned} P\left[\left|\sum_{i=1}^n U_i \tilde{g}_i\right| > \xi_n, \{I(r_i) = 1 \forall i\}\right] &\leq \xi_n^{-2} \sum_{i=1}^n E[U_i \tilde{g}_i \{I(r_i) = 1\}]^2 + \\ &+ \xi_n^{-2} \sum_{i \neq k} E[U_i U_k \tilde{g}_i \tilde{g}_k \{I(r_i) = 1 \forall k\}] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Karena  $\tilde{g}_i \{I(r_i) = 1\} \leq c_n \log(n)$  independen terhadap  $U_i$ , bentuk pertama pada (3.12) adalah order  $O\left[n \xi_n^{-2} c_n^2 \log^2(n)\right] = o(1)$ . Syarat kedua dapat dengan mudah dilihat sama dengan nol. Dengan demikian Lemma terbukti.

**Lemma A6**

Apabila asumsi asumsi 1- 4 dipenuhi, maka :

$$\begin{aligned} n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) \varepsilon_j U_i &= o_P(1) \\ n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) \varepsilon_j \varepsilon_i &= o_P(1) \\ n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) U_j U_i &= o_P(1) \end{aligned}$$



**Bukti :**

Jika  $r_{ij}$  merupakan kejadian dimana  $|\omega_{nj}(T_i)| \leq Cb_n \log n$ .

$$P\left\{n^{-1/2}\left|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\omega_{nj}(T_i)U_i\right|>\xi\right\}\leq P\left\{n^{-1/2}\left|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_jU_i\right|>\xi,I(r_{ij}=1,\forall i,j)\right\}+P\left\{\max_n n^{-1/2}|\omega_{nj}(T_i)|>Cb_n\log n\right\}$$

Dengan menggunakan asumsi 3 (ii) bentuk kedua menuju ke 0.

Untuk bentuk I :

$$P\left\{n^{-1/2}\left|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_jU_i\right|>\xi,I(r_{ij}=1,\forall i,j)\right\}\leq\left\{n^{-1}\xi^{-2}E\left\{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_jU_i(r_{ij}=1,\forall i,j)\right\}\right\}=\left\{n^{-1}\xi^{-2}\sum_{i=1}^nE\left\{\sum_{j=1}^n\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j(r_{ij}=1,\forall i)\right\}EU_i^2\right\}.$$

Persamaan terakhir dipenuhi karena  $U_i$  dan  $E\left\{\sum_{j=1}^n\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j(r_{ij}=1,\forall i)\right\}$  independen

untuk setiap  $i$ , dan  $U_i$  iid dengan mean 0.

Hal ini cukup dibuktikan :

$$\max_i E\left\{\sum_{j=1}^n\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j(r_{ij}=1,\forall i)\right\}^2\longrightarrow 0$$

Kenyataannya :

$$E\left\{\sum_{j=1}^n\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j(r_{ij}=1,\forall i)\right\}^2=E\left\{\sum_{j=1}^n\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j(r_{ij}=1,\forall i)\right\}+E\left\{\sum_{j\neq k}^n\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j\omega_{nk}(T_i)\varepsilon_k(r_{ij}=1,\forall i)\right\}$$

Bentuk kedua bernilai 0. Bentuk pertama sama dengan :



$$\sum_{j=1}^n E\{\omega_{nj}(T_j)\varepsilon_j(r_{ij} = 1, \forall i),\}^2$$

dan persamaan ini mempunyai order  $O\{nb_n^2 \log^2(n)\} = o(1)$ .

**Lemma A7**

Apabila asumsi 1- 3 dipenuhi dan  $E(\varepsilon_i + \|U_i\|^4) < \infty$ , maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \tilde{W}^T \tilde{W} = B + \Sigma_{uu} \quad (3.13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \tilde{W}^T \tilde{Y} = B\beta \quad (3.14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \tilde{Y}^T \tilde{Y} = \beta^T B \beta + \sigma^2 \quad (3.15)$$

**Bukti:**

Karena  $W_i = X_i + U_i$  dan  $\tilde{W}_i = \tilde{X}_i + \tilde{U}_i$ , didapat

$$\left(\tilde{W}^T \tilde{W}\right)_{sm} = \left(\tilde{X}^T \tilde{X}\right)_{sm} + \left(\tilde{U}^T \tilde{X}\right)_{sm} + \left(\tilde{X}^T \tilde{U}\right)_{sm} + \left(\tilde{U}^T \tilde{U}\right)_{sm} \quad (3.16)$$

Dengan SLLN dan Lemma A.2 diperoleh :

$$n^{-1} \sum_{j=1}^n X_{js} U_{jm} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.} \quad (3.17)$$

Dimana :

$$\begin{aligned} n^{-1} \sum_{j=1}^n \tilde{X}_{js} \tilde{U}_{jm} &= n^{-1} \left[ \sum_{j=1}^n X_{js} U_{jm} - \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_j) X_{ks} \right\} U_{jm} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_j) U_{km} \right\} X_{js} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_j) X_{ks} \right\} \left\{ \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_j) U_{km} \right\} \right] \end{aligned}$$



dapat kita buktikan bahwa  $\sup_{j \leq n} \left| \sum_{k=1}^n \omega_{nk} (T_j) U_{km} \right| = O_p(1)$ , Dari persamaan (3.17) dan asumsi 3(ii) dapat ditarik kesimpulan bahwa tiap bentuk diatas menuju ke nol. Dengan alasan yang sama,  $n^{-1} (\tilde{U}^T \tilde{X})_{sm}$  juga konvergen ke nol

Akan dibuktikan

$$n^{-1} (\tilde{U}^T \tilde{U})_{sm} \rightarrow \sigma_{sm}^2 \quad (3.18)$$

dimana  $\sigma_{sm}^2$  adalah elemen ke(s,m) dari  $\Sigma_{uu}$ .

$$\begin{aligned} n^{-1} (\tilde{U}^T \tilde{U})_{sm} &= \frac{1}{n} \left[ \sum_{j=1}^n U_{js} U_{jm} - \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n \omega_{nk} (T_j) U_{ks} \right\} U_{jm} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n \omega_{nk} (T_j) U_{km} \right\} U_{js} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n \omega_{nk} (T_j) U_{ks} \right\} \left\{ \sum_{k=1}^n \omega_{nk} (T_j) U_{km} \right\} \right] \end{aligned}$$

diketahui  $n^{-1} \sum_{j=1}^n U_{js} U_{jm} \rightarrow \sigma_{sm}^2$ . Mengikuti Lemma A3 dan A6 dan persamaan (3.18). Dengan menggunakan persamaan (3.16) dan (3.18) dengan argumentasi untuk  $1/n (\tilde{U}^T \tilde{X})_{sm} \rightarrow 0$  dan  $1/n (\tilde{X}^T \tilde{U})_{sm} \rightarrow 0$ , kita selesaikan bukti dari persamaan (3.13)

Kemudian kita buktikan persamaan (3.14) :  $\tilde{W}^T \tilde{Y} = \tilde{W}^T (\tilde{X}\beta + \tilde{G} + \tilde{\epsilon})$ , dengan

menggunakan lemma 1.  $\sum_{j=1}^n \tilde{g}_j^2 = O_p(C_n^2 n)$ , karena :

$$\left| \sum_{j=1}^n X_{js} \tilde{g}_j \right| \leq \left( \sum_{j=1}^n X_{js}^2 \sum_{j=1}^n \tilde{g}_j^2 \right)^{1/2} \leq c_n n^{1/2} \left( \sum_{j=1}^n X_{js}^2 \right) \leq C n c_n,$$

$$\frac{1}{n} (\tilde{W}^T \tilde{\epsilon})_s \rightarrow 0 \text{ dan } \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{U}_{js} \tilde{g}_j \rightarrow 0 \text{ dengan } n \rightarrow \infty,$$



sehingga

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} (\tilde{W}^T \tilde{G})_s &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{X}_{js} \tilde{g}_j + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{U}_{js} \tilde{g}_j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\{ X_{js} - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_j) X_{ks} \right\} \tilde{g}_j + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{U}_{js} \tilde{g}_j \rightarrow 0 \end{aligned}$$

dengan  $n \rightarrow \infty$ .

**Lemma A8.**

Diasumsikan bahwa asumsi 1- 4 dipenuhi, maka :

$$\begin{aligned} n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon}_i \tilde{X}_i &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i V_i + o_p(1) \\ n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \tilde{U}_i^T &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n V_i U_i^T + o_p(1) \end{aligned}$$

**Bukti :**

Akan dibuktikan bentuk pertama, bentuk kedua dapat dibuktikan dengan cara yang sama.

Jika  $h(T) = E(X|T)$  dan  $h_i(T) = h(T_i)$ .

$$\begin{aligned} n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon}_i \tilde{X}_i &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left( \varepsilon_i - \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) \varepsilon_j \right) \tilde{X}_i \\ &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \tilde{X}_i - n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) \varepsilon_j \\ &= n^{-1/2} (I - II) \end{aligned}$$



Sehingga didapatkan :

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \tilde{X}_i = \sum_{i=1}^n \left( X_i - \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) X_j \right) \varepsilon_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \left( V_i + h(T_i) - \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) (V_j + h(T_j)) \right) \varepsilon_i \\
 &= \left( \sum_{i=1}^n \varepsilon_i V_i + \sum_{i=1}^n \left[ h(T_i) - \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) h(T_j) \right] \varepsilon_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) (V_j) \varepsilon_i \right) \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \varepsilon_i V_i + \max_i \left| h_i(T) - \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) h(T_j) \right| \max_i \sum_{i=1}^n \varepsilon_i + \max_{1 \leq i, j \leq n} \omega_{nj}(T_i) \max_i \sum_{j=1}^n V_j \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \\
 &= \left( \sum_{i=1}^n \varepsilon_i V_i + O(n^{-1/3} \log n) o_p(n) + O(n^{-2/3} \log n) O(n^{1/2} \log n) o_p(n) \right) \\
 &= \left( \sum_{i=1}^n \varepsilon_i V_i + o_p(n^{2/3} \log n) + o_p(n^{5/6} \log n) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i V_i + a_{n1} + a_{n2}
 \end{aligned}$$

Akan dijabarkan  $a_{n1}$  sebagai berikut :

$$a_{n1} = op(n^{2/3} \log n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n1}}{n^{2/3} \log n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2/3} \log n} = 0$$

$$\text{Karena } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2/3} \log n} \neq 0 \text{ maka } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n1} = 0$$

$$\text{Sehingga } a_{n1} = op(1)$$

Dengan cara yang sama diperoleh  $a_{n2} = op(1)$



$$\begin{aligned}
\Pi &= \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) \epsilon_j = \sum_{i=1}^n \left( X_i - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) X_k \right) \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) \epsilon_j \\
&= \sum_{i=1}^n \left( V_i + h(T_i) - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) (V_k + h(T_k)) \right) \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) \epsilon_j \\
&= \sum_{i=1}^n \left( h(T_i) - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) h(T_k) + V_i - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) V_k \right) \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) \epsilon_j \\
&= \sum_{i=1}^n \left( h(T_i) - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) h(T_k) \right) \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) \epsilon_j + \sum_{i=1}^n (V_i) \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) \epsilon_j + \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) V_k \right) \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) \epsilon_j \\
&\leq \left( \max_i \left| h(T_i) - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) h(T_k) \right| \max_i \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) \epsilon_j \right) + \\
&\quad + \left( \max_i \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) \epsilon_j \sum_{i=1}^n (V_i) \right) + \\
&\quad + \left( \max_i \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(T_i) \max_i \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) \epsilon_j \sum_{k=1}^n V_k \right) \\
&= (O_p(n^{-1/3} \log n) o_p(n^{-2/5} \log n)) + (o_p(n^{-2/5} \log n) o_p(n)) + \\
&\quad + (O_p(n^{-1/3} \log n) o_p(n^{-2/5} \log n) o_p(n)) \\
&= (o_p(n^{-11/15} \log n) + o_p(n^{3/5} \log n) + o_p(n^{4/15} \log^2 n)) \\
&= b_{n1} + b_{n2} + b_{n3}
\end{aligned}$$

Akan dijabarkan  $b_{n1}$  sebagai berikut :

$$b_{n1} = o_p(n^{-11/15} \log n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n1}}{n^{-11/15} \log n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{-11/15} \log n} = 0$$

$$\text{Karena } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{-11/15} \log n} \neq 0 \text{ maka } \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n1} = 0$$

$$\text{Sehingga } b_{n1} = o_p(1)$$

Dengan cara yang sama diperoleh  $b_{n2} = o_p(1)$  dan  $b_{n3} = o_p(1)$

Dari I dan II, maka Lemma terbukti.  $\ddot{y}$



**Theorema 3.2.1.**

Apabila asumsi 1- 4 dipenuhi, maka :

$$n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{d} N(0, B^{-1}\Gamma B^{-1}),$$

dengan  $\Gamma = E\{[\varepsilon - U^T\beta][X - E(X|T)]\}^{\otimes 2} + E\{(UU^T - \Sigma_{UU})\beta\}^{\otimes 2} + E(UU^T\varepsilon^2)$ ,

dimana  $A^{\otimes 2} = AA^T$

jika  $\varepsilon$  adalah homoskedastis dan independan terhadap  $(X, T)$ .

**Bukti**

Didefinisikan  $\Delta_n = (\tilde{W}^T \tilde{W} - n\Sigma_{uu})/n$ . Maka :

$$\begin{aligned} n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta) &= n^{1/2}((\tilde{W}^T \tilde{W} - n\Sigma_{uu})^{-1} \tilde{W}^T \tilde{Y} - \beta) \Delta_n^{-1} \Delta_n \\ &= n^{-1/2} \Delta_n^{-1} (\tilde{W}^T \tilde{Y} - \tilde{W}^T \tilde{W} \beta + n\Sigma_{uu} \beta) \\ &= n^{-1/2} \Delta_n^{-1} ((\tilde{X}^T + \tilde{U}^T)(\tilde{X} \beta + \tilde{G} + \tilde{\varepsilon}) - (\tilde{X}^T + \tilde{U}^T)(\tilde{X} + \tilde{U}) \beta + n\Sigma_{uu} \beta) \\ &= n^{-1/2} \Delta_n^{-1} (\tilde{X}^T \tilde{X} \beta + \tilde{X}^T \tilde{G} + \tilde{X}^T \tilde{\varepsilon} + \tilde{U}^T \tilde{X} \beta + \tilde{U}^T \tilde{G} + \tilde{U}^T \tilde{\varepsilon}) - \\ &\quad - \tilde{X}^T \tilde{X} \beta - \tilde{X}^T \tilde{U} \beta - \tilde{U}^T \tilde{X} \beta - \tilde{U}^T \tilde{U} \beta + n\Sigma_{uu} \beta \\ &= n^{-1/2} \Delta_n^{-1} (\tilde{X}^T \tilde{G} + \tilde{X}^T \tilde{\varepsilon} + \tilde{U}^T \tilde{G} + \tilde{U}^T \tilde{\varepsilon} - \tilde{X}^T \tilde{U} \beta - \tilde{U}^T \tilde{U} \beta + n\Sigma_{uu} \beta) \end{aligned}$$

Dengan Lemma A.1, A.2, A.4, A.5, A.6 dan A.8 :

$$\begin{aligned} n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta) &= n^{-1/2} \Delta_n^{-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{X}_i^T \tilde{g}_i + \tilde{X}_i^T \tilde{\varepsilon}_i + \tilde{U}_i^T \tilde{g}_i + \tilde{U}_i^T \tilde{\varepsilon}_i - \tilde{X}_i^T \tilde{U}_i \beta - \tilde{U}_i^T \tilde{U}_i \beta + \Sigma_{uu} \beta) \\ &= n^{-1/2} \Delta_n^{-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{W}_i^T \tilde{g}_i - \tilde{U}_i^T \tilde{g}_i + \tilde{X}_i^T \tilde{\varepsilon}_i + \tilde{U}_i^T \tilde{g}_i + \tilde{U}_i^T \tilde{\varepsilon}_i - \tilde{X}_i^T \tilde{U}_i \beta - \tilde{U}_i^T \tilde{U}_i \beta + \Sigma_{uu} \beta) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta) &= n^{-1/2} \Delta_n^{-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{W}_i^T \tilde{g}_i + \tilde{X}_i \tilde{\varepsilon}_i + \tilde{U}_i \tilde{\varepsilon}_i - \tilde{X}_i^T \tilde{U}_i \beta - \tilde{U}_i \tilde{U}_i^T \beta + \Sigma_{uu} \beta) \\ &= \Delta_n^{-1} \left( n^{-1/2} \sum_{i=1}^n V_i \varepsilon_i + o_p(1) + n^{-1/2} \sum_{i=1}^n U_i \varepsilon_i - n^{-1/2} \sum_{i=1}^n V_i U_i^T \beta + \right) \\ &\quad + \Delta_n^{-1} \left( o_p(1) \beta - \sum_{i=1}^n U_i U_i^T \beta + n^{1/2} \Sigma_{uu} \beta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^{1/2}(\hat{\beta} - \beta) &= n^{-1/2} \Delta_n^{-1} \sum_{i=1}^n (V_i \varepsilon_i + U_i \varepsilon_i - V_i U_i^T \beta - U_i U_i^T \beta + \Sigma_{uu} \beta) + o_p(1) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} n^{-1/2} \Delta_n^{-1} \sum_{i=1}^n \zeta_{in} + o_p(1) \end{aligned}$$

karena  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n V_i = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n V_i V_i^T = B$ , dan  $\sup_i E(\varepsilon^4 + \|U\|^4) < \infty$ ,

dipenuhi elemen-elemen barisan ke-k  $\{\zeta_{in}^{(k)}\}$  dari  $\{\zeta_{in}\} (k = 1, \dots, p)$ , untuk sebarang

$\zeta > 0$ , maka  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\{\zeta_{in}^{(k)^2} \mathbf{I}(|\zeta_{in}^{(k)}| > \zeta n^{1/2})\} \rightarrow 0$  dengan  $n \rightarrow \infty$

Berarti kondisi Lindeberg Feller CLT dipenuhi.

Sehingga

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\zeta_{ni}) &= E\{V_i (\varepsilon_i - U_i^T \beta)^2 V_i^T\} + E\{(U_i U_i^T - \Sigma_{uu}) \beta\}^{\otimes 2} + E(U_i U_i^T \varepsilon_i^2) \\ &\quad + V_i E(U_i^T \beta \beta^T U_i U_i^T) + E(U_i U_i^T \beta \beta^T U_i) V_i, \end{aligned}$$

Maka :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \text{Cov}(\zeta_{ni}) (\Delta_n^{-1}) &= B^{-1} \{E(\varepsilon - U^T \beta)^2 B + E\{(U \cdot U^T - \Sigma_{uu}) \beta\}^{\otimes 2} + E(U U^T \varepsilon^2)\} B^{-1} \\ &= B^{-1} \Gamma B^{-1} \end{aligned}$$

dengan demikian Teorema terbukti.



### 3.3. Sifat Asimtotis Untuk Bagian Nonparametrik.

#### Theorema 3.3.1

Apabila 1-3 dipenuhi dan  $\omega_{ni}(t)$  kontinuu Lipschitz order 1 untuk semua  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Jika  $E(\varepsilon^4 + \|\mathbf{U}\|^4) < \infty$  maka untuk titik desain tetap  $T_i$ , bias asimtotik dan variansi asimtotik dari  $\hat{g}_n(t)$  adalah :

$$\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)g(T_i) - g(t) \text{ dan } \sum_{i=1}^n \omega_{ni}^2(t)(\beta^T \Sigma_{UU} \beta + \sigma^2)$$

#### Bukti :

Karena  $\hat{\beta}_n$  penaksir yang konsisten dari  $\beta$ , bias asimtotik dan variansi asimtotik

dari  $\sum_{j=1}^n \omega_{nj}(t)(Y_j - W_j^T \beta)$ , yang dinotasikan dengan  $\hat{g}_n^*(t)$  adalah :

$$\begin{aligned} \text{I. } E\hat{g}_n^*(t) - g(t) &= E\left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)(Y_i - W_i^T \beta) - g(t) \right\} \\ &= E\left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)(g(T_i) + \varepsilon_i) - g(t) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)g(T_i) - g(t) \end{aligned}$$



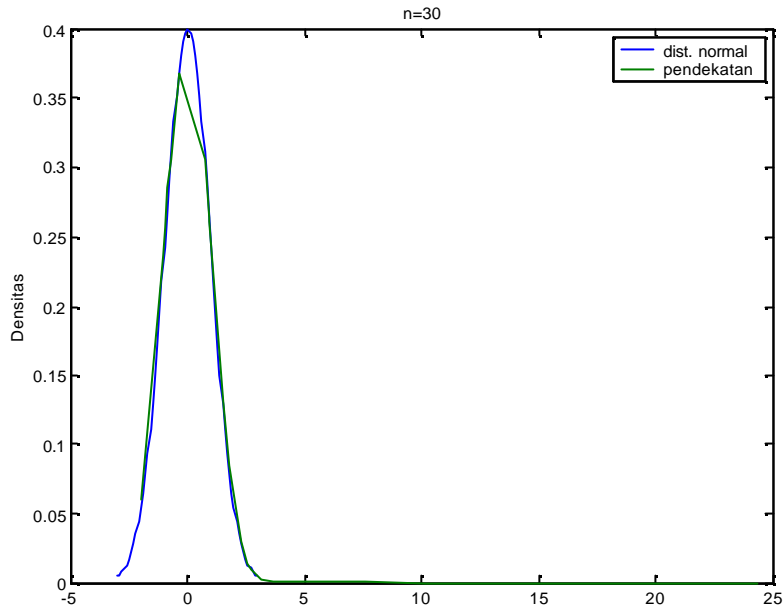
$$\begin{aligned}
 \text{II. } E\{\hat{g}_n^*(t) - E\hat{g}_n^*(t)\}^2 &= E\left\{\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)(Y_i - W_i^T\beta) - \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)(g(T_i))\right\}^2 \\
 &= E\left\{\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)(Y_i - W_i^T\beta - g(T_i))\right\}^2 \\
 &= E\left\{\sum_{i=1}^n \omega_{ni}^2(t)(Y_i - W_i^T\beta - g(T_i))^2\right\} + \\
 &\quad + E\left\{\sum_{i \neq j} \sum_{i < j} \omega_{ni}(t)(Y_i - W_i^T\beta - g(T_i))\omega_{nj}(t)(Y_j - W_j^T\beta - g(T_j))\right\} \\
 &= E\left\{\sum_{i=1}^n \omega_{ni}^2(t)(Y_i - W_i^T\beta - g(T_i))^2\right\} + E\left\{\sum_{i \neq j} \sum_{i < j} \omega_{ni}(t)\varepsilon_i\omega_{nj}(t)\varepsilon_j\right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \omega_{ni}^2(t)(\beta^T \Sigma_{UU}\beta + \sigma^2)
 \end{aligned}$$

Dengan demikian teorema terbukti.  $\ddot{y}$

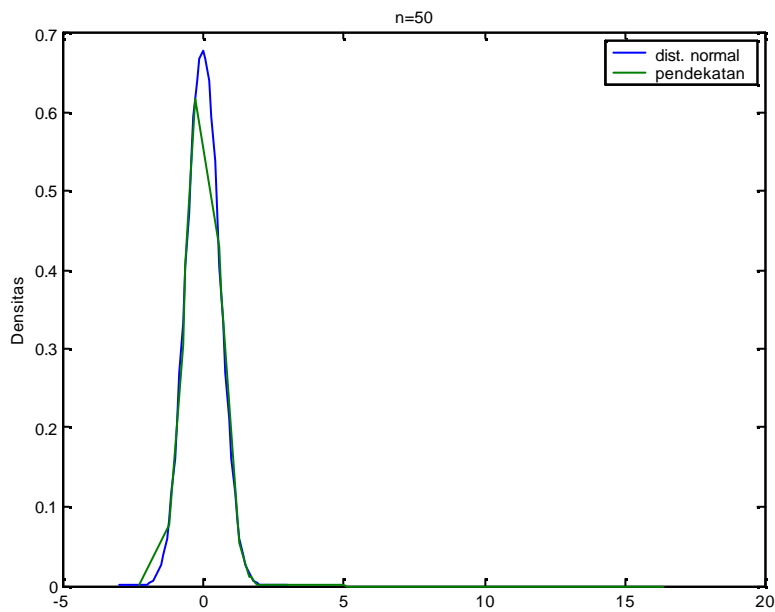
### 3.4. Simulasi

Dari model linear parsial dengan kesalahan pengukuran,  $Y_i = W_i^T\beta + g(T_i) + \varepsilon_i^*$ , akan dilakukan simulasi dengan  $g(t)=t^3$ ,  $\beta=5$ ,  $U \sim N(0,1)$ ,  $\varepsilon \sim N(0,1)$ ,  $T \sim U(0,1)$  dan  $n = 200$ . Estimasi nonparametrik digunakan estimator Nadaraya Watson dengan kernel Gaussian dan kriteria pemilihan parameter penghalus  $h$  dengan GCV.

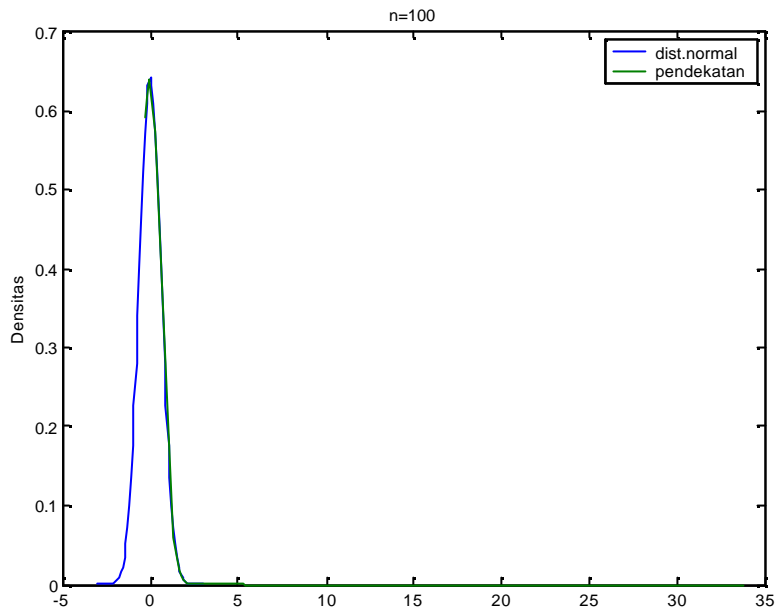
Dari Lampiran 2, plot  $Y$  dengan  $W$  dan  $Y$  dengan  $T$ , nampak hubungan  $Y$  dan  $W$  cenderung linear,  $Y$  dan  $T$  tidak terlihat pola yang jelas. Sehingga untuk mengestimasi parameter dan fungsi yang tidak diketahui digunakan model linear parsial dengan kesalahan pengukuran.



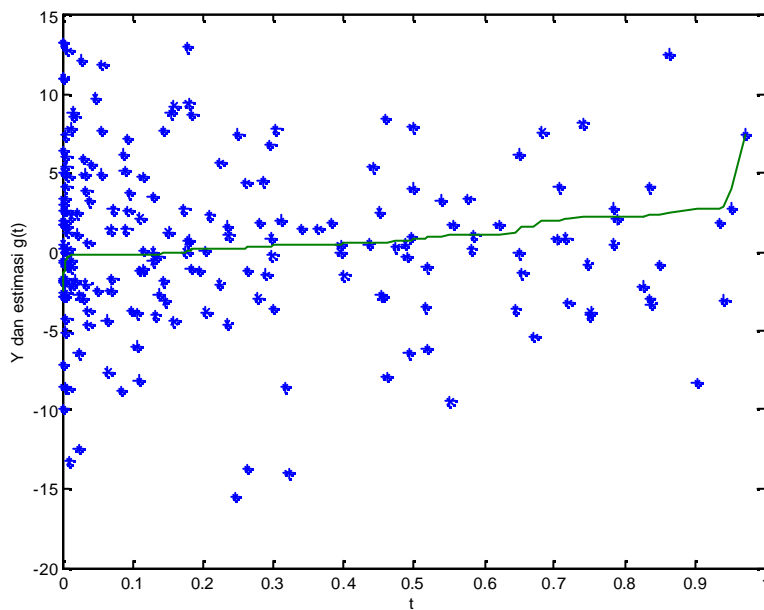
Gambar 3.1. Plot  $n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta)$  dengan  $n=30$



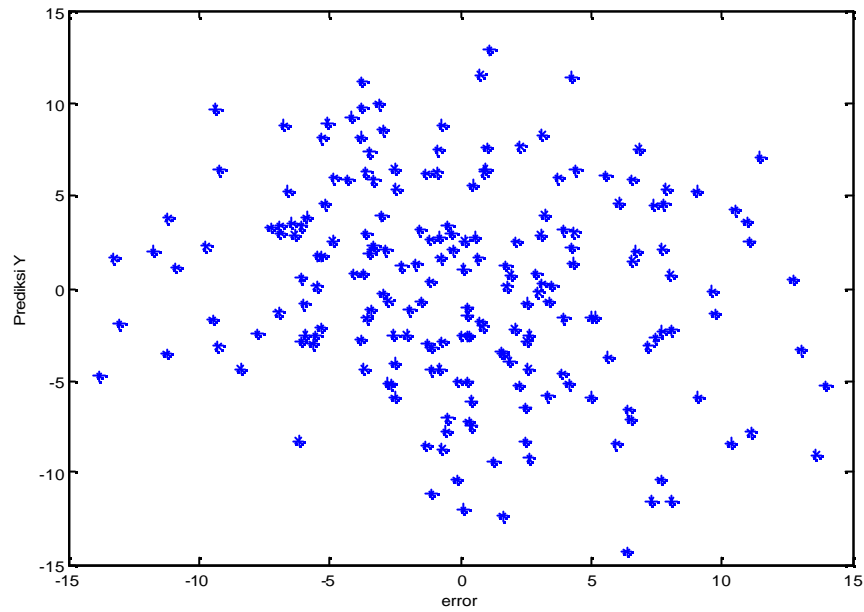
Gambar 3.2. Plot  $n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta)$  dengan  $n=50$



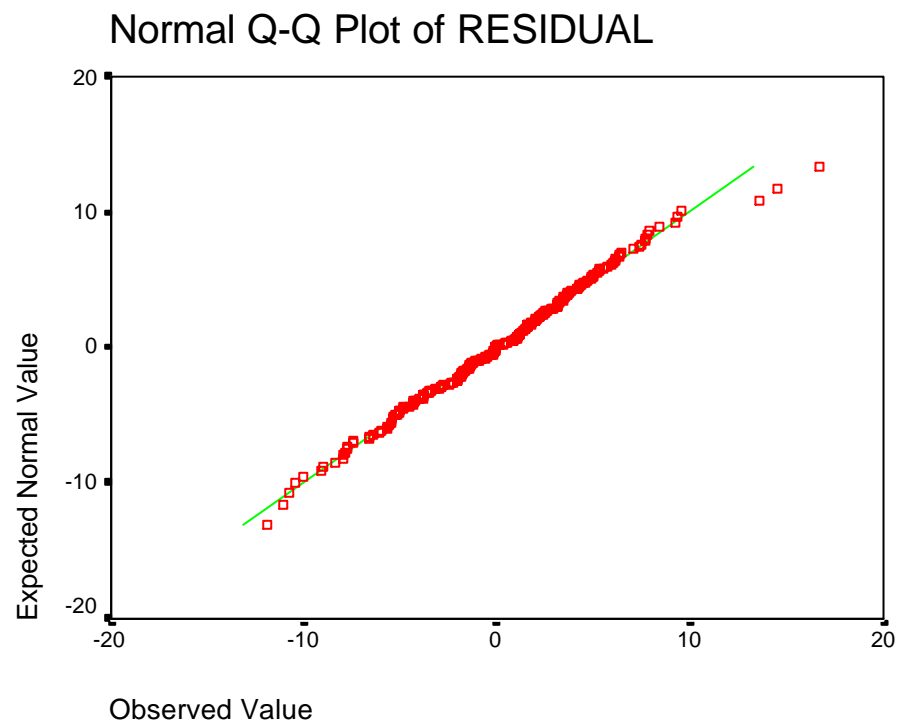
Gambar 3.3. Plot  $n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta)$  dengan  $n=100$



Gambar 3. 4. Plot antara  $t$  dengan  $Y$  dan estimasi  $g(t)$  dengan  $h=0.024$



Gambar 3. 5. Plot antara Residual dan Prediksi



Gambar 3. 6. QQ plot residual



Dari hasil simulasi dengan  $h=0.024$  diperoleh,  $\hat{\beta}=5.164$ ,  $\hat{\sigma}_{UU} = 2.318$

Dari Gambar 3.1, 3.2 dan 3.3, distribusi  $n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta)$  untuk  $n$  berturut-turut 30,50 dan 100, memberikan pendekatan yang cukup bagus terhadap distribusi normal. Dari plot residual dengan prediksi pada gambar 5, nampak residual terlokasi secara random, yang mengindikasikan model sesuai dengan data.

Dari qq plot pada gambar 6, residual dapat dibentuk garis lurus, yang mengindikasikan residual mengikuti distribusi normal

## BAB IV

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 4.1. Kesimpulan

Pada Model Linear Parsial dengan Kesalahan Pengukuran,

$Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$ , komponen nonparametrik  $g(\cdot)$  diestimasi dengan estimator

Nadaraya Watson :  $\hat{g}(t) = \sum_{j=1}^n \omega_{hj}(T)(Y_j - W_j^T \beta)$ , sedangkan untuk bagian

parametrik :  $\hat{\beta}_n = (\tilde{W}^T \tilde{W} - nS_{UU})^{-1} \tilde{W}^T \tilde{Y}$

Sifat kenormalan asimtotis estimator  $\hat{\beta}_n$  adalah:

$$n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{d} N(0, B^{-1} \Gamma B^{-1}),$$

dengan  $\Gamma = E\{(\varepsilon - U^T \beta)(X - E(X|T))\}^{\otimes 2} + E\{(UU^T - \Sigma_{UU})\beta\}^{\otimes 2} + E(UU^T \varepsilon^2)$ ,

dimana  $A^{\otimes 2} = AA^T$

Bias asimtotik dan variansi asimtotik dari  $\hat{g}_n(t)$  adalah :

$$\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)g(T_i) - g(t) \text{ dan } \sum_{i=1}^n \omega_{ni}^2(t)(\beta^T \Sigma_{UU} \beta + \sigma^2)$$

#### 4.2. Saran

Untuk penelitian lebih lanjut, perlu diberikan kasus-kasus nyata yang diterapkan pada model linear parsial dengan kesalahan pengukuran, serta identifikasi variabel-variabel prediktornya.



## RINGKASAN

### BAB I

#### PENDAHULUAN

##### 1.1. Latar Belakang

Jika terdapat  $n$  pengamatan saling bebas  $(X_i, Y_i)$ ,  $i=1,2,3,\dots,n$ , persamaan regresi dinyatakan sebagai berikut :

$$Y_i = g(X_i) + \varepsilon_i, i=1,2,3,\dots,n \quad (1.1)$$

Dengan  $g$  fungsi regresi tidak diketahui,  $\varepsilon_i$ ,  $i=1,2,3,\dots,n$  merupakan variabel kesalahan random.

Model regresi dengan menganggap bahwa bentuk fungsi  $g(\cdot)$  diketahui disebut model regresi parametrik, sedangkan jika bentuk fungsi  $g(\cdot)$  tidak diketahui disebut model regresi nonparametrik.

Pada pendekatan nonparametrik akan lebih fleksibel untuk mencari kurva estimator yang sesuai dengan data karena model tidak ditentukan lebih dahulu seperti pada model parametrik..

Jika sebagian variabel random independen mempunyai hubungan fungsional dengan variabel respon dalam bentuk spesifikasi tertentu, sedangkan variabel independen lainnya mempunyai hubungan fungsional dalam bentuk fungsional tidak tertentu, maka digunakan pendekatan dengan model linear parsial. Dengan model  $Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$ .  $X_i$  dan  $T_i$  merupakan vektor variabel penjelas, yang merupakan titik design tidak random (fixed). Fungsi  $g$  merupakan fungsi yang tidak diketahui dan  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$  merupakan parameter tidak diketahui,  $\varepsilon_i$ ,



$i=1,2,3,\dots,n$  merupakan kesalahan random dengan mean 0 dan variansi tetap (pola homoskedastisitas).

Pada kasus model linear parsial dengan kesalahan pengukuran yaitu kovariat  $X_i$  diukur dengan kesalahan, sebagai pengganti pengamatan  $X_i$ , diamati :

$$W_i = X_i + U_i$$

Dimana kesalahan ukuran  $U_i$  i.i.d, independen dengan  $(Y_i, X_i, T_i)$  dengan mean 0 dan matriks kovariansinya  $\Sigma_{UU}$  diasumsikan diketahui.

## 1.2. Permasalahan

Permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan estimasi parameter dan sifat normalitas asimtotis  $\hat{\beta}_n$  pada model linear parsial dengan kesalahan pengukuran

## 1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini adalah menentukan estimasi parameter dan sifat normalitas asimtotis  $\hat{\beta}_n$  pada model linear parsial dengan kesalahan pengukuran.

## 1.4. Tinjauan Pustaka

Dalam praktek, penerapan dari model linear parsial banyak sekali. Engle, Granger, Rice dan Weiss (1966), yang pertama kali menggunakan model ini. Mereka menganalisa hubungan antara temperatur dan penggunaan listrik.

Speckman (1988) menerapkan model linear parsial pada percobaan obat kumur.



Sedangkan untuk model dengan kesalahan pengukuran telah diteliti oleh Fuller (1987), Carrol, Rupper and Stefanskim (1995). Andrew Chesher (1991) meneliti tentang efek dsri kesalahan pengukuran.

Green, Jennison dan Seheult (1985), Goa (1992) telah mempelajari sifat-sifat asimtotis dari estimator dengan kuadrat terkecil pada kasus design titik non random

Engle, Grangeerm Rice dan Weiss (1986), Heckman (1996), rice (1986) Whaba (1990), Green dan Silverman (1994) dan Eubank, Kambour, Kim, Klipple, reese dan Schimek (1998) menggunakan teknik penghalusan untuk penakasiran parameter.

## BAB II

### PENGERTIAN DASAR

#### 2.1. Regresi Parametrik

Diberikan  $n$  pasangan pengamatan  $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ . Pandang model regresi :

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.1)$$

Dimana  $Y_i$  merupakan variabel respon,  $X_i$  variabel prediktor dan  $\varepsilon_i$  kesalahan random, dengan asumsi tidak berkorelasi dan mean 0.

Asumsi pada regresi parametrik adalah bentuk fungsi regresi  $m(\cdot)$  diketahui, kecuali untuk sejumlah berhingga parameter yang tidak diketahui, yaitu ada vektor parameter  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$  dan ada fungsi  $m(\cdot; \beta)$  sehingga  $m(\cdot) = m(\cdot; \beta)$ . Fungsi regresi  $m(\cdot; \beta)$ , dapat berbentuk linear dalam parameter ataupun non linear. Fungsi disebut non linear jika minimal non linear dalam satu parameter. Dan disebut linear jika terdapat fungsi diketahui  $f_1, f_2, \dots, f_p$  sedemikian hingga

$$m(x) = \sum_{j=1}^p \beta_j f_j(x).$$

Akan tetapi dalam tulisan ini dibatasi pada model yang linear

saja. Sehingga jika terdapat  $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ , pengamatan, maka model akan menjadi :

$$Y_i = \sum_{j=1}^p \beta_j f_j(x_i) + \varepsilon_i; \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.2)$$

Model diatas jika dituliskan dalam notasi matriks akan menjadi :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{e}$$

Dimana  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ,  $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$  dan  $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T$ , dengan asumsi  $\varepsilon_i \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ .

Dengan model (2.2), untuk mengestimasi  $\mathbf{m}$  ekuivalen dengan mengestimasi koefisien-koefisien regresi yaitu  $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$ .

Ada beberapa metode panaksiran parameter regresi, salah satunya metode kuadrat terkecil. Metode ini meminimalkan  $\mathbf{e}^T \mathbf{e}$  terhadap  $\mathbf{b}$ . Diperoleh :

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{Y}) \quad (2.3)$$

Dengan sifat estimator tersebut :

1.  $\hat{\mathbf{b}}$  merupakan penaksir yang tak bias untuk  $\mathbf{b}$
2.  $\text{Var}(\hat{\mathbf{b}}) = s^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$
3.  $\hat{\mathbf{b}}$  merupakan penaksir terbaik, yang berarti diantara semua penaksir linear takbias untuk  $\mathbf{b}$ ,  $\hat{\mathbf{b}}$  mempunyai variansi minimal.

## 2.2. Regresi Non Parametrik

Untuk  $n$  pasangan pengamatan  $\{(T_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ , diberikan model regresi nonparametrik sebagai berikut :

$$Y_i = g(T_i) + \varepsilon_i, \quad i=1,2,3,\dots,n \quad (2.4)$$

Dimana  $Y_i$  merupakan variabel respon,  $T_i$  variabel prediktor dan  $\varepsilon_i$  kesalahan random, dengan asumsi tidak berkorelasi dan mean 0.

Dalam regresi nonparametrik tidak ada asumsi tentang bentuk fungsi regresi  $g(\cdot)$ . Hal ini memberikan *flexibilitas* yang lebih besar didalam bentuk yang mungkin dari fungsi regresi. Untuk mengkonstruksi model regresi nonparametrik terlebih dahulu dipilih ruang fungsi yang sesuai, dimana fungsi regresi  $g(\cdot)$



diyakini termasuk didalamnya. Pemilihan ruang fungsi ini biasanya dimotivasi oleh sifat kelicinan yang diasumsikan dimiliki oleh fungsi regresi.

Ada beberapa teknik untuk mengestimasi fungsi regresi  $g(\cdot)$ , salah satunya adalah dengan estimator kernel. Sebagai contoh estimator kernel untuk fungsi regresi  $g(\cdot)$  :

$$\hat{g}_n(t) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(t - T_i) Y_i}{n^{-1} \sum_{j=1}^n K_h(t - T_j)}$$

dimana  $h$  : lebar pita (*bandwidth*);  $K_h(t) = h^{-1}K(t/h)$ , dan  $K$  disebut fungsi kernel

### 2.2.1 Fungsi Kernel

Diberikan suatu sampel random  $X_i, i=1,2,3,\dots,n$  iid. Karakteristik dasar yang menggambarkan kalakuan dari suatu variabel random adalah fungsi densitas  $f$  dari sampel random tersebut. Berdasarkan sampel random ini akan diestimasi fungsi densitas  $f$  yang tidak diketahui dengan pendekatan kernel. Kernel  $K$  didefinisikan (Hardle, 1990) :

$$K_h(t) = \frac{1}{h} K\left(\frac{t}{h}\right)$$

dengan  $h$  adalah *bandwidth*. Fungsi densitas  $f$  diestimasi dengan :

$$\hat{f}_h(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(t - T_i) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - T_i}{h}\right) \quad (2.5)$$



**Definisi 2.1.**

Kernel K adalah fungsi bernilai real, kontinu, terbatas, simetri dan integralnya

sama dengan 1. 
$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt = 1 \text{ dan } \int_{-\infty}^{\infty} t K(t)dt = 0$$

Beberapa fungsi kernel (Hardle1990) :

Kernel	K(u)
Uniform	$\frac{1}{2} I( u  \leq 1)$
Triangle	$(1 -  u ) I( u  \leq 1)$
Epanechnikov	$\frac{3}{4} (1 - u^2) I( u  \leq 1)$
Quartic	$\frac{15}{16} (1 - u^2)^2 I( u  \leq 1)$
Triweight	$\frac{35}{32} (1 - u^2)^3 I( u  \leq 1)$
Gaussian	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} u^2)$
Cosinus	$\frac{\pi}{4} \text{Cos}(\frac{\pi}{4} u) I( u  \leq 1)$

Dari definisi kernel diatas maka : 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_h(t) dt = 1$$

Estimator kernel untuk fungsi densitas bersama variabel random T dan Y diperoleh dengan kernel multiplikatif :

$$\hat{f}_{h_1 h_2}(t, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) K_{h_2}(y - Y_i) \tag{2.6}$$

**Lemma 2.1**

Jika  $\hat{f}_{h_1 h_2}(t, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) K_{h_2}(y - Y_i)$  maka



$$\int_{-\infty}^{\infty} y \hat{f}_{h|n_2}(t, y) dy = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h1}(t - T_i) Y_i \quad (2.7)$$

Selanjutnya estimator kernel untuk model regresi nonparametrik  $Y_i = g(T_i) + \varepsilon_i$

Dikonstruksikan sebagai berikut :

$$\text{Kurva regresi : } g(t) = E(Y|T = t) = \frac{\int y f(t, y) dy}{f(t)} \quad (2.8)$$

dimana  $f(t, y)$  merupakan fungsi densitas bersama  $(T, Y)$  dan  $f(t)$  fungsi densitas marginal untuk  $T$ .

Estimator natural untuk  $g(t)$  adalah dengan mengganti pembilang dan penyebut pada persamaan (2.8), (2.5) dan (2.7) dengan mengambil *bandwidth* yang sama yaitu  $h$ , maka diperoleh :

$$\hat{g}(t) = \frac{\int y \hat{f}_{h|n_2}(t, y) dy}{\hat{f}_h(t)} = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(t - T_i) Y_i}{n^{-1} \sum_{j=1}^n K_h(t - T_j)} = n^{-1} \sum_{i=1}^n W_{ni}(t) Y_i \quad (2.9)$$

$$\text{dengan } W_{ni}(t) = \frac{K_h(t - T_i)}{n^{-1} \sum_{j=1}^n K_h(t - T_j)}$$

Persamaan (2.9) telah di temukan oleh Nadaraya (1964) dan Watson (1964). Oleh karena itu estimator ini sering disebut “Estimator Nadaraya Watson”.

Karena persamaan (2.9) tergantung pada nilai  $h$ , maka nilai-nilai ekstrim untuk  $h$  mengakibatkan :



- Anggap estimator kernel hanya dihitung pada pengamatan  $\{T_i, i=1,2,\dots,n\}$ .

$$\text{Maka jika } h \rightarrow 0, \hat{g}_n(T_i) \rightarrow \frac{K(0)Y_i}{K(0)} = Y_i$$

Jadi *bandwidth* ( $h$ ) sangat kecil, estimator akan menuju ke data

- Jika  $h \rightarrow \infty$  maka  $K\left(\frac{t-T_i}{h}\right) \rightarrow K(0)$ , akibatnya

$$\hat{g}_n(T_i) \rightarrow \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n K(0)Y_i}{n^{-1} \sum_{i=1}^n K(0)} = \frac{n^{-1} K(0) \sum_{i=1}^n Y_i}{n^{-1} (nK(0))} = n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i = \bar{Y}$$

Jadi *bandwidth* ( $h$ ) sangat besar, estimator akan sangat mulus dan menuju rata-rata dari variabel respon.

Jika diambil  $\omega_{ni}(t) = \frac{K_h(t-T_i)}{\sum_{j=1}^n K_h(t-T_j)}$  maka estimator  $g(t)$  ekuivalen dengan :

$$\hat{g}(t) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(t-T_i)Y_i}{n^{-1} \sum_{j=1}^n K_h(t-T_j)} = \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)Y_i$$

### 2.3. MODEL LINEAR PARSIAL

Model Linear Parsial merupakan gabungan dari regresi parametrik dan regresi nonparametrik. Model linear parsial mengasumsikan data  $\{(X_i, T_i, Y_i) : i=1,2,\dots,n\}$  mempunyai bentuk :

$$Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i. \quad (2.10)$$



$X_i$  dan  $T_i$  merupakan vektor variabel penjelas, yang merupakan titik design tidak random (fixed).  $g$  merupakan fungsi yang tidak diketahui dan  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$  merupakan parameter tidak diketahui,  $\varepsilon_i$ ,  $i=1,2,3,\dots,n$  merupakan kesalahan random dengan mean 0 dan variansi tetap.  $X_i^T \beta$  merupakan komponen parametrik, dimana estimasinya dilakukan dengan metode Least Square.  $g(T_i)$  merupakan komponen nonparametrik, dimana estimasinya menggunakan estimator kernel.

### 2.3.1. Estimasi parameter

Jadi jika  $\beta$  adalah parameter sebenarnya, persamaan (2.10) dapat dinyatakan sebagai :

$$Y_i - X_i^T \beta = g(T_i) + \varepsilon_i \quad (2.11)$$

Jika  $Y_i^* = Y_i - X_i^T \beta$ , maka dengan menggunakan teori regresi diperoleh :

$$g(t) = E(Y^* | T = t) = \frac{\int y^* g(t, y^*) dy^*}{g(t)} \quad (2.12)$$

Untuk fungsi densitas bersama  $g(t, Y^*)$  diestimasi dengan pergandaan kernel

$$\begin{aligned} \hat{g}_{h_1 h_2}(t, y^*) &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) K_{h_2}(y^* - Y_i^*) \\ \int y^* \hat{g}_{h_1 h_2}(t, y^*) dy^* &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) \int \frac{y^*}{h_2} K\left(\frac{y^* - Y_i^*}{h_2}\right) dy^* \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) \int (sh_2 + Y_i^*) K(s) ds \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(t - T_i) Y_i^* \end{aligned}$$



Sehingga diperoleh :

$$\hat{g}_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(t-T_i)Y_i^*}{\sum_{j=1}^n K_h(t-T_j)} = \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)(Y_i - X_i^T \beta) \quad (2.13)$$

dimana :

$$\omega_{ni}(t) = \frac{K_h(t-T_i)}{\sum_{j=1}^n K_h(t-T_j)} = \frac{K\left(\frac{t-T_i}{h}\right)}{\sum_{j=1}^n K\left(\frac{t-T_j}{h}\right)}$$

Selanjutnya  $\hat{g}_n(t)$  menggantikan  $g(t)$  pada persamaan (2.10), sehingga didapatkan model estimasi sebagai berikut :

$$Y_i = X_i^T \beta + \hat{g}(T_i) + \varepsilon_i \quad (2.14)$$

Berdasarkan model diatas, dengan menggunakan metode kuadrat terkecil diperoleh taksiran  $\beta$  dengan meminimumkan  $\varepsilon' \varepsilon$  sebagai berikut :

$$\hat{\beta}_n = (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \tilde{Y} \quad (2.15)$$

dengan

$$\tilde{X}_i = \left[ X_i - \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i)X_j \right], \quad \tilde{Y}_i = \left[ Y_i - \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i)Y_j \right]$$

$$\tilde{Y}^T = (\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots, \tilde{Y}_n), \quad \tilde{X}^T = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n)$$

Setelah mendapatkan  $\hat{\beta}_n$ , maka  $\beta$  pada persamaan (2.13) diganti dengan  $\hat{\beta}_n$ , untuk menghitung  $\hat{g}_n(t)$ .

$$\hat{g}_n(t) = \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)(Y_i - X_i^T \hat{\beta}_n)$$



### 2.3.2. Sifat Asimtotik Estimator

Untuk mendapatkan sifat-sifat asimtotik untuk  $\beta$  diperlukan beberapa pengertian, teorema dan asumsi berikut :

#### Definisi 2.2.

Fungsi  $g$  dikatakan kontinyu di  $x$  bila untuk setiap  $\epsilon > 0$  terdapat  $\delta > 0$  sedemikian hingga untuk setiap  $y$  dalam domain fungsi dengan  $|x-y| < \delta$  berlaku  $|g(x)-g(y)| < \epsilon$

#### Definisi 2.3. (Rudin, W, 1976)

Fungsi  $g$  dikatakan kontinyu Lipschitz pada  $[a,b]$  bila terdapat konstanta  $M > 0$  sedemikian hingga  $|g(x)-g(y)| < M|x-y|$  untuk setiap  $x,y$  dalam  $[a,b]$

#### Definisi 2.4. (Pfeffer, W.F, 1993)

#### Konvergen Dalam Probabilitas (Casella, Berger, 1990)

Barisan variabel random  $X_1, X_2, X_3, \dots$  konvergen dalam probabilitas ke suatu variabel random  $X$  jika untuk setiap  $\epsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$  atau

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \epsilon) = 1 \quad \text{atau biasa ditulis } X_n \xrightarrow{P} X$$

#### Definisi 2.5.

#### Konvergen Hampir Pasti (Casella, Berger, 1990)

Barisan variabel random  $X_1, X_2, X_3, \dots$  konvergen hampir pasti ke suatu variabel random  $X$  jika untuk setiap  $\epsilon > 0$ ,  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| < \epsilon) = 1$  atau biasa ditulis



$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$$

### Definisi 2.6.

#### Konvergen Dalam Distribusi (Casella, Berger, 1990)

Barisan variabel random  $X_1, X_2, X_3, \dots$  konvergen dalam distribusi ke suatu variabel random  $X$  jika  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$  pada setiap titik  $x$  dimana  $F_X(x)$  kontinyu.

Atau biasa ditulis  $X_n \xrightarrow{d} X$

### Teorema 2.1.

#### Strong Law of Large Number (Casella, Berger, 1990)

Jika  $X_i, i=1,2,\dots$  variabel random i.i.d. dengan mean  $\mu < \infty$ , maka

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu \text{ untuk } n \rightarrow \infty$$

### Teorema 2.2.

#### Weak Law of Large Number (Casella, Berger, 1990)

Jika  $X_i, i=1,2,\dots$  variabel random i.i.d. dengan mean  $\mu < \infty$ , maka

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu \text{ untuk } n \rightarrow \infty$$



**Definisi 2.7.** (Serfling R.J, 1980)

Barisan  $\{a_n\}$  dan  $\{b_n\}$  dinyatakan sebagai  $a_n = O(b_n)$  jika terdapat bilangan real  $M$

sedemikian sehingga  $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| = M$

**Definisi 2.8.** (Serfling R.J, 1980)

Barisan  $\{a_n\}$  dan  $\{b_n\}$  dinyatakan sebagai  $a_n = o(b_n)$  jika  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

Dengan sifat dari “O” :

- jika  $a_{n1} = O(b_{n1})$ ,  $a_{n2} = O(b_{n2})$  maka  $a_{n1} + a_{n2} = O(b_{n1} + b_{n2})$
- jika  $\alpha > 0$  adalah konstanta,  $a_n = O(\alpha b_n)$  maka  $a_n = O(b_n)$
- jika  $a_{n1} = O(b_{n1})$ ,  $a_{n2} = O(b_{n2})$  maka  $a_{n1} \cdot a_{n2} = O(b_{n1} \cdot b_{n2})$

**Definisi 2.9.** (Serfling R.J, 1980)

Barisan  $\{a_n\}$  dan  $\{b_n\}$  dinyatakan sebagai  $a_n = O_p(b_n)$  jika terdapat bilangan real

$M$  dan  $N$  sedemikian sehingga  $P\left\{\left|\frac{a_n}{b_n}\right| > M\right\} \leq \varepsilon, \quad \forall n > N$

**Definisi 2.10.** (Serfling R.J, 1980)

Barisan  $\{a_n\}$  dan  $\{b_n\}$  dinyatakan sebagai  $a_n = o_p(b_n)$  jika untuk semua  $\varepsilon > 0$

sedemikian sehingga  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$



**Teorema 2.3 Teorema Limit Pusat** (Casella, Berger, 1990)

Misalkan  $X_i, i=1,2,\dots$  variabel random i.i.d. yang mempunyai mgf ( $M_x(t)$ ) ada untuk  $|t|<h$ , untuk beberapa  $h$  positif). Misal  $E(x_i) = \mu$  dan  $\text{var}(x_i) = \sigma^2$ .

Didefinisikan  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $G_n(x)$  merupakan fungsi distribusi kumulatif dari

$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$ . Maka untuk sembarang  $x, -\infty < x < \infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy, \text{ yaitu } \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma \text{ berdistribusi normal}$$

standart.

**Teorema 2.4.** (Sen, P.K dan Singer,1993)

Jika  $\{X_i\}$  merupakan vektor random i.i.d pada  $\mathbb{R}^p$  dengan mean  $\mu_i$  dan matriks kovarian  $\Sigma_i$ , maka :

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma), \Sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \Sigma_i$$

**Teorema 2.5.** (Sen, P.K dan Singer,1993)

Jika  $Z \sim N(\mu, \Omega)$  dan  $A$  adalah suatu matriks, maka vektor  $U = AZ \sim N(A\mu, A\Omega A^T)$

Jika komponen  $X_i = (X_{ij})$ . Didefinisikan :  $h_j(T_i) = E(X_{ij} | T_i)$  dan  $V_i = X_i - E(X_i | T_i)$

$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$

**Asumsi 1.**

$\sup_{0 \leq t \leq 1} E\|X_1\|^4 | T = t) < \infty$  dan  $B = E(V_1 V_1^T)$  adalah matriks definit positif



**Asumsi 2.**

$g(\cdot)$  dan  $h_j(\cdot)$  kontinyu Lipschitz

**Asumsi 3.** Fungsi bobot  $\omega_{ni}(\cdot)$  memenuhi :

$$i). \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) = O_p(1)$$

$$ii). \max_{1 \leq i, j \leq n} \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(T_j) = O_p(b_n)$$

$$iii). \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) I(|T_j - T_i| > c_n) = O_p(c_n)$$

dimana  $b_n = n^{-2/3} \log n$  dan  $c_n = n^{-1/3} \log n$ .

**Lemma 2.2.**

Jika asumsi 1,2,3 dipenuhi maka  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X} = B$

**2.3.1.1. Sifat kenormalan**

Dari lemma 2.2 dengan  $B$  adalah matriks definit positif, maka

$\tilde{X}^T \tilde{X} = O(n)$ , artinya terdapat bilangan real  $M_1$ , sedemikian hingga :

$$\frac{1}{n} (\tilde{X}^T \tilde{X}) \leq M_1 \tag{2.16}$$

dengan  $E(\tilde{X}^T \varepsilon) = 0$  dan  $\text{Var}(\tilde{X}^T \varepsilon) = \sigma^2 \tilde{X}^T \tilde{X}$

Menurut pertidaksamaan Chebyshev, yaitu jika variabel random dengan mean  $\mu$

dan variansi berhingga  $\nabla \delta$  berlaku :



$$P\left[|Z - \mu| \geq \delta\right] \leq E\left[\frac{(Z - \mu)^2}{(\delta)^2}\right] \quad (2.17)$$

dipilih  $\delta = n^{1/2}M_2$  pada persamaan (2.17) dan menggunakan pertidaksamaan (2.16) terhadap variabel random  $\tilde{X}^T \varepsilon$ , maka untuk setiap  $M_2 > 0$  berlaku :

$$P\left[|\tilde{X}^T \varepsilon - 0| \geq n^{1/2}M_2\right] \leq \left[\frac{\sigma^2 (\tilde{X}^T \tilde{X})^2}{nM_2^2}\right] \leq \sigma^2 \frac{M_1}{M_2^2}$$

$$\text{atau } P\left[|n^{-1/2}\tilde{X}^T \varepsilon| \geq M_2\right] \leq \sigma^2 \frac{M_1}{M_2^2} \quad (2.18)$$

jika untuk sebarang  $\varepsilon_1 > 0$  dipilih  $M_2$  sehingga  $\sigma^2 \frac{M_1}{M_2^2} \leq \varepsilon_1$  maka

$$M_2 \geq \sqrt{\frac{\sigma^2 M_1}{\varepsilon_1}} = \sigma \left(\frac{M_1}{M_2^2}\right)^{1/2}$$

Sehingga persamaan (2.18) dapat ditulis menjadi :

$$P\left[|n^{-1/2}\tilde{X}^T \varepsilon| \geq M_2\right] \leq \varepsilon_1 \quad (2.19)$$

berdasarkan definisi 2.9 dan 2.10 order dalam probabilitas maka pertidaksamaan (2.19) menjadi  $\tilde{X}^T \varepsilon = O_p(n^{1/2})$  atau dinyatakan sebagai :

$$\tilde{X}^T \varepsilon = o_p(n) \quad (2.20)$$

Akan diselidiki distribusi asimtotis dari  $n^{-1/2}\tilde{X}^T \varepsilon$  dengan menggunakan teorema

2.4. Untuk menerapkan teorema limit pusat terhadap  $n^{-1/2}\tilde{X}^T \varepsilon$ , dimisalkan  $\tilde{X}_i$

vektor px1 yaitu baris ke-i dari matriks  $\tilde{X}$  dan  $Z_i = \tilde{X}_i \varepsilon_i$ , maka :

$$\text{Var}(Z_i) = V_i = \sigma^2 \tilde{X}_i \tilde{X}_i^T$$



$$\begin{aligned}\Sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 \tilde{X}_i \tilde{X}_i^T \\ &= \sigma^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X} = \sigma^2 B\end{aligned}$$

$$\text{Jadi } \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{X}^T \varepsilon \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 B) \quad (2.21)$$

Persamaan  $Y_i = X_i^T \beta + \hat{g}(t_i) + \varepsilon_i$  dapat dipandang sebagai  $\tilde{Y} = \tilde{X} \beta + \varepsilon$  sehingga

dperoleh :

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_n &= (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \tilde{Y} \\ \hat{\beta}_n &= (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T (\tilde{X} \beta + \varepsilon) \\ \hat{\beta}_n &= (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \tilde{X} \beta + (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon \\ \hat{\beta}_n &= \beta + (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon\end{aligned} \quad (2.22)$$

Atau

$$\hat{\beta}_n - \beta = (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon$$

Kemudian dihitung :

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) &= \sqrt{n}(\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon \\ &= n \frac{1}{\sqrt{n}} (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon \\ &= n (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \frac{\tilde{X}^T \varepsilon}{\sqrt{n}} \\ &= \left( \frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X} \right)^{-1} \frac{\tilde{X}^T \varepsilon}{\sqrt{n}}\end{aligned} \quad (2.23)$$

Dari persamaan (2.21) maka persamaan (2.23) menjadi

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{D} B^{-1} Z \text{ dimana } Z \sim N(0, \sigma^2 B) \quad (2.24)$$



Dengan menggunakan teorema (2.5), maka untuk persamaan (2.24), jika  $Z \sim N(0, \sigma^2 B)$  maka  $B^{-1}Z \sim N(0, \sigma^2 B^{-1}BB^{-1})$ , sehingga

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 B^{-1}) \quad (2.25)$$

### 2.3.1.2. Sifat Konsisten

Estimator kuadrat terkecil  $\hat{\beta}_n$  konsisten untuk  $\beta$  artinya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \hat{\beta}_n - \beta \right| < \varepsilon \right) = 1 \text{ atau bisa dituliskan } \text{plim } \hat{\beta}_n = \beta.$$

Dari persamaan (2.27)

$$\hat{\beta}_n = \beta + (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon$$

$$\hat{\beta}_n = \beta + \left( \frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X} \right)^{-1} \frac{1}{n} \tilde{X}^T \varepsilon$$

$$p \lim \hat{\beta}_n = \beta + p \lim \left( \frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X} \right)^{-1} \frac{1}{n} \tilde{X}^T \varepsilon$$

$$p \lim \hat{\beta}_n = \beta + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X} \right)^{-1} p \lim \frac{1}{n} \tilde{X}^T \varepsilon$$

$$p \lim \hat{\beta}_n = \beta + B^{-1} \cdot 0 \quad \text{dari lemma 2.3 dan persamaan 2.25}$$

$$p \lim \hat{\beta}_n = \beta$$

### 2.3.2. Pemilihan Bandwith

Wahba (1975), Craven dan Wahba (1979) dan Golub, Heath dan Wahba (1979) telah memperkenalkan kriteria pemilihan *Bandwith* ( $h$ ) yang optimal dengan menggunakan kriteria GCV (Generalized Cross-Validation) :

$$GCV(h) = RSS(h) / [1 - n^{-1} \text{tr}(A(h))]^2$$



Dari persamaan (2.10),  $Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$ ,  $i=1,2,3,\dots,n$ , dinyatakan dalam bentuk matriks :

$$Y = X\beta + g + e \quad (2.31)$$

Didefinisikan  $\hat{Y}$  adalah estimator dari  $E(Y)$  yang bergantung pada  $h$  yaitu :

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= X\hat{\beta}_n + \hat{g} \\ &= X\hat{\beta}_n + W(Y - X\hat{\beta}_n) \\ &= X\hat{\beta}_n + WY - WX\hat{\beta}_n \\ &= WY + (1 - W)X\hat{\beta}_n \\ &= WY + \tilde{X}\hat{\beta}_n \end{aligned}$$

Didefinisikan  $\hat{Y} = A(h)Y$ ,  $GCV(h) = RSS(h)/[1 - n^{-1}\text{tr}(A(h))]^2$

$RSS(h)$  merupakan rata-rata jumlah kuadrat error

$$RSS(h) = n^{-1} \|Y - \hat{Y}\|^2 = n^{-1} \|Y - A(h)Y\|^2 = n^{-1} \|(I - A(h))Y\|^2 \quad (2.32)$$

Sehingga :

$$\begin{aligned} A(h)Y &= \hat{Y} \\ A(h)Y &= WY + \tilde{X}\hat{\beta}_n \quad (\text{dikalikan dengan } Y^{-1}) \\ A(h) &= W + \tilde{X}\hat{\beta}_n Y^{-1} \\ A(h) &= W + \tilde{X}(\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \tilde{Y} Y^{-1} \\ A(h) &= W + \tilde{X}(\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T (1 - W) Y Y^{-1} \\ A(h) &= W + \tilde{X}(\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T (1 - W) \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } A(h) = W + P_{\tilde{X}}(I - W), \quad P_{\tilde{X}} = \tilde{X}(\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T$$

Dengan nilai  $GCV$  yang minimal akan didapatkan nilai *bandwidth* yang optimal

### BAB III

#### MODEL LINEAR PARSIAL DENGAN KESALAHAN PENGUKURAN

#### 3.1. Estimasi Parameter $b$ dan Fungsi $g(\cdot)$

Diketahui suatu model linear parsial dari  $n$  sampel :  $Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$

Dimana kovariate  $X_i$  diukur dengan kesalahan. Sebagai pengganti pengamatan  $X_i$ , diamati :

$$W_i = X_i + U_i \quad (3.1)$$

Dimana ukuran error  $U_i$  i.i.d, independen dengan  $(Y_i, X_i, T_i)$  dengan mean 0 dan matriks kovariansinya  $\Sigma_{UU}$ . Diasumsikan  $\Sigma_{UU}$  diketahui.

Dari persamaan (2.10) dan (3.1) didapatkan :

$$\begin{aligned} Y_i &= X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i \\ &= W_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i - U_i^T \beta \\ &= W_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i^* \end{aligned} \quad (3.2)$$

Untuk  $\beta$  diketahui sebagai parameter yang benar maka dapat dicari estimasi fungsi  $g(\cdot)$ , dari persamaan (3.2) :

$$Y_i - W_i^T \beta = g(T_i) + \varepsilon_i^* \quad (3.3)$$

Model (3.3) dapat dipandang sebagai model regresi nonparametrik dengan respon  $Y_i - W_i^T \beta$ , dari sub bab 2.2 diperoleh :

$$\hat{g}(t) = \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T)(Y_j - W_j^T \beta) \quad (3.4)$$



Dalam kasus ini diasumsikan bahwa  $\varepsilon_i$  mempunyai mean 0 dan variansi tetap  $\sigma^2$ .

Berarti  $E\{Y_i - X_i^T\beta - g(T_i)\}^2 = \sigma^2$ , sehingga :

$$\begin{aligned} E\{Y_i - W_i^T\beta - g(T_i)\}^2 &= E\{Y_i - X_i^T\beta - U_i^T\beta - g(T_i)\}^2 \\ &= E\{Y_i - X_i^T\beta - g(T_i)\}^2 + E(U_i^T\beta)^2 \\ &= E\{Y_i - X_i^T\beta - g(T_i)\}^2 + \beta^T \Sigma_{UU}\beta \\ &= \sigma^2 + \beta^T \Sigma_{UU}\beta \end{aligned}$$

Persamaan (3.3) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\tilde{Y}_i = \tilde{W}_i^T\beta + \varepsilon_i^*$$

$$\text{Dengan MSE} = \hat{\sigma}^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{Y}_i - \tilde{W}_i^T\hat{\beta})^2}{n}$$

Karena  $\sigma^2 = \sigma^{*2} - \beta^T \Sigma_{UU}\beta$  maka  $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^{*2} - \hat{\beta}^T \Sigma_{UU}\hat{\beta}$

$$\text{Sehingga : } \hat{\sigma}_n^2 = n^{-1} \sum_i (\tilde{Y}_i - \tilde{W}_i^T\hat{\beta}_n)^2 - \hat{\beta}_n^T \Sigma_{UU}\hat{\beta}_n \quad (3.5)$$

Dari estimasi  $\sigma^2$  pada persamaan (3.5), akan digunakan untuk menentukan estimasi  $\beta$  sebagai berikut :

$$\hat{b}_n = (\tilde{W}^T \tilde{W} - nS_{UU})^{-1} \tilde{W}^T \tilde{Y} \quad (3.6)$$

Setelah mendapatkan  $\hat{\beta}_n$ , maka  $\beta$  pada persamaan (3.4) diganti dengan  $\hat{\beta}_n$ , untuk menghitung  $\hat{g}_n(t)$ .

$$\hat{g}(t) = \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T)(Y_j - W_j^T\hat{\beta})$$

### 3.2. Normalitas Asimtotis Untuk Parameter.

Untuk membahas sifat asimtotis dibutuhkan beberapa pengertian, asumsi dan lemma berikut :

#### Ketidaksamaan Abel :

Barisan bilangan  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  ( $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ )

merupakan barisan bilangan real. Maka :

$$b_1 \left( \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k a_i \right) \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq b_1 \left( \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k a_i \right)$$

#### Asumsi 4.

$$E(\epsilon_i) = E(U_i) = 0 \text{ dan } \sup_i E(\epsilon_i + ||U_i||^4) < \infty$$

#### Lemma A1.

Apabila asumsi 1-4. berlaku, maka :

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| G_j(T_i) - \sum \omega_{nk}(T_i) G_j(T_k) \right| = O_p(c_n), j=1,2,3,\dots,p$$

$$G_0(\cdot) = g(\cdot) \text{ dan } G_l(\cdot) = h_l(\cdot), l=1,2,3,\dots,p$$

#### Lemma A2.

Apabila Asumsi 1- 4 berlaku , maka

$$n^{-1} \tilde{X}^T \tilde{X} = B + o_p(1)$$



**Lemma A.3** (Ketidaksamaan Bernstein).

Misalkan  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  variabel random saling bebas dengan mean 0 dan range terbatas:  $|\Gamma_i| \leq M$ . Kemudian untuk setiap  $\eta > 0$ ,

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^n \Gamma_i\right| > \eta\right\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{\eta^2}{2\left[\sum_{i=1}^n \text{var}(\Gamma_i) + M\eta\right]}\right\}$$

Dinotasikan  $e'_j = e_j I(|e_j| \leq n^{1/4})$  dan  $e''_j = e_j - e'_j = e_j I(|e_j| > n^{1/4}), j = 1, \dots, n$ .

**Lemma A.4.**

Apabila asumsi 1- 4 dipenuhi, maka :

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{k=1}^n g_{nk}(T_i) e_k \right| = o_p\{n^{-2/5} \log(n)\}$$

**Lemma A.5.**

Apabila asumsi 1 – 4 dipenuhi, maka :

$$\sum_{i=1}^n U_i \tilde{g}_i = o_p(n^{1/2});$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \tilde{g}_i = o_p(n^{1/2})$$

Perlakuan yang sama jika  $g(T_i)$  digantikan dengan  $h_j(T_i)$ .

**Lemma A6**

Apabila asumsi 1- 4 dipenuhi, maka :



$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) \varepsilon_j U_i = o_p(1)$$

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) \varepsilon_j \varepsilon_i = o_p(1)$$

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_{nj}(T_i) U_j U_i = o_p(1)$$

$$O\{nb_n^2 \log^2(n)\} = o(1)$$

### Lemma A7

Diasumsikan bahwa asumsi 1-.3 dipenuhi dan  $E(\varepsilon_i + ||U_i||^4) < \infty$ , maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \tilde{W}^T \tilde{W} = B + \Sigma_{uu} \quad (3.13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \tilde{W}^T \tilde{Y} = B\beta \quad (3.14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \tilde{Y}^T \tilde{Y} = \beta^T B \beta + \sigma^2 \quad (3.15)$$

### Lemma A8.

Apabila asumsi 1-.4 dipenuhi, maka :

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon}_i \tilde{X}_i = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon}_i n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i V_i + o_p(1)$$

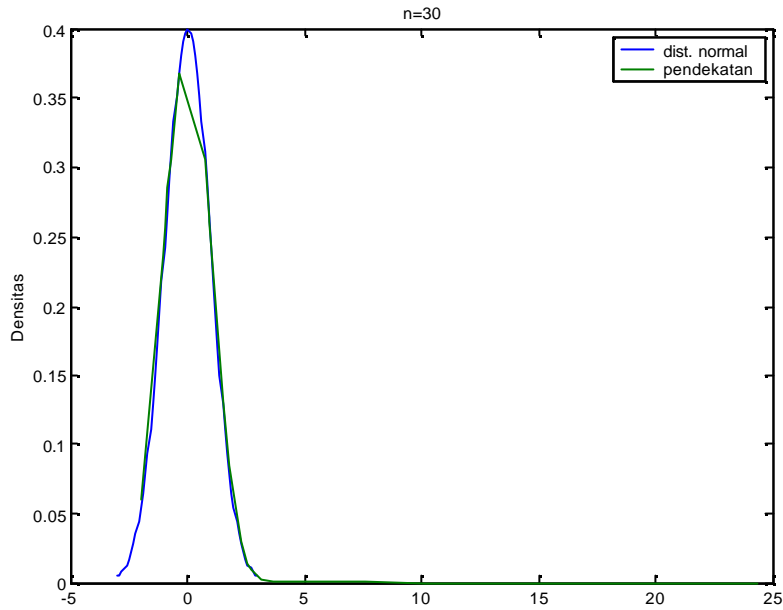
$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \tilde{U}_i^T = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n V_i U_i^T + o_p(1)$$

### Theorema 3.2.1.

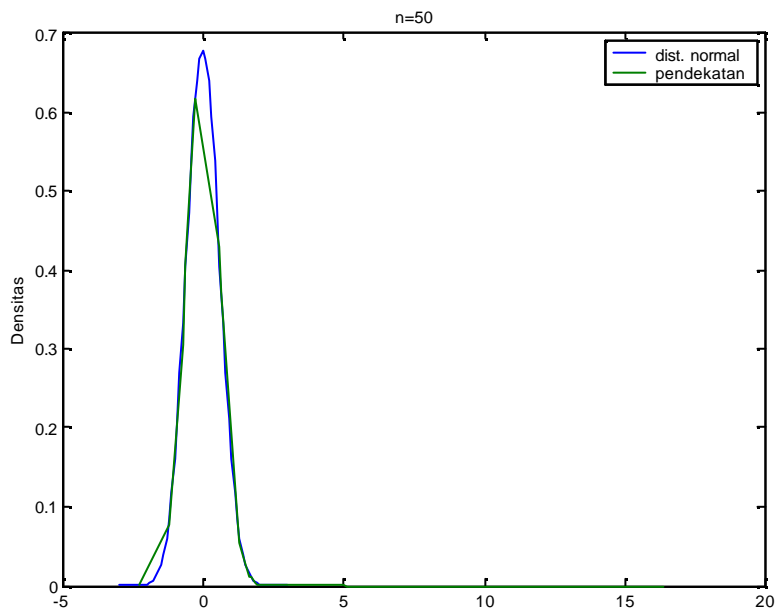
Apabila asumsi 1-.4 berlaku, maka :

$$n^{1/2} (\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{d} N(0, B^{-1} \Gamma B^{-1}),$$

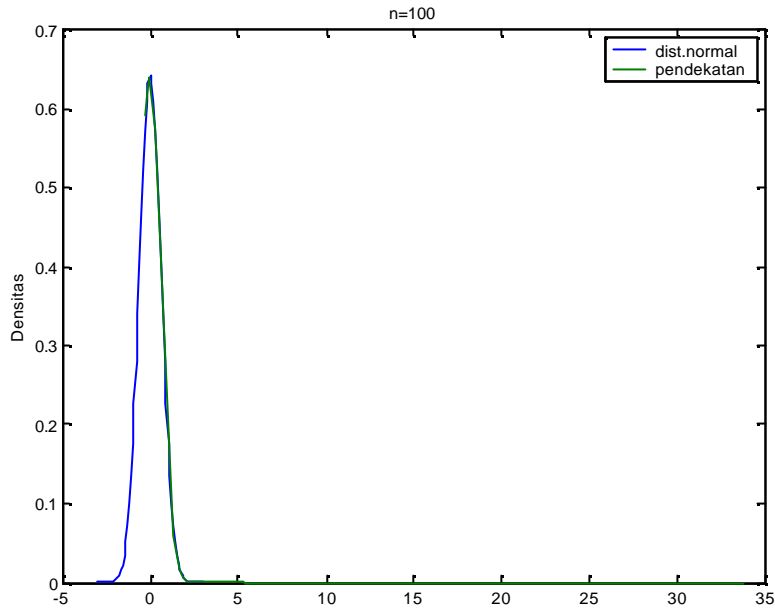




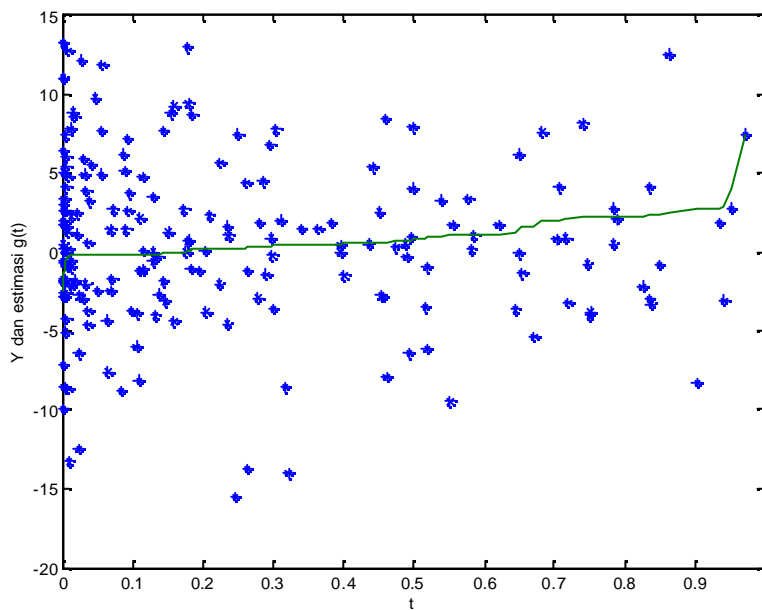
Gambar 3.1. Plot  $n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta)$  dengan  $n=30$



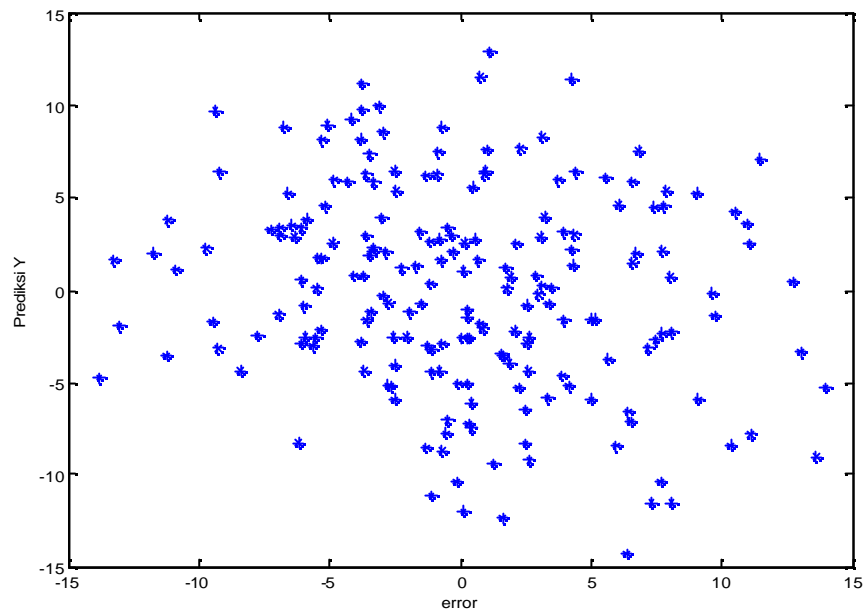
Gambar 3.2. Plot  $n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta)$  dengan  $n=50$



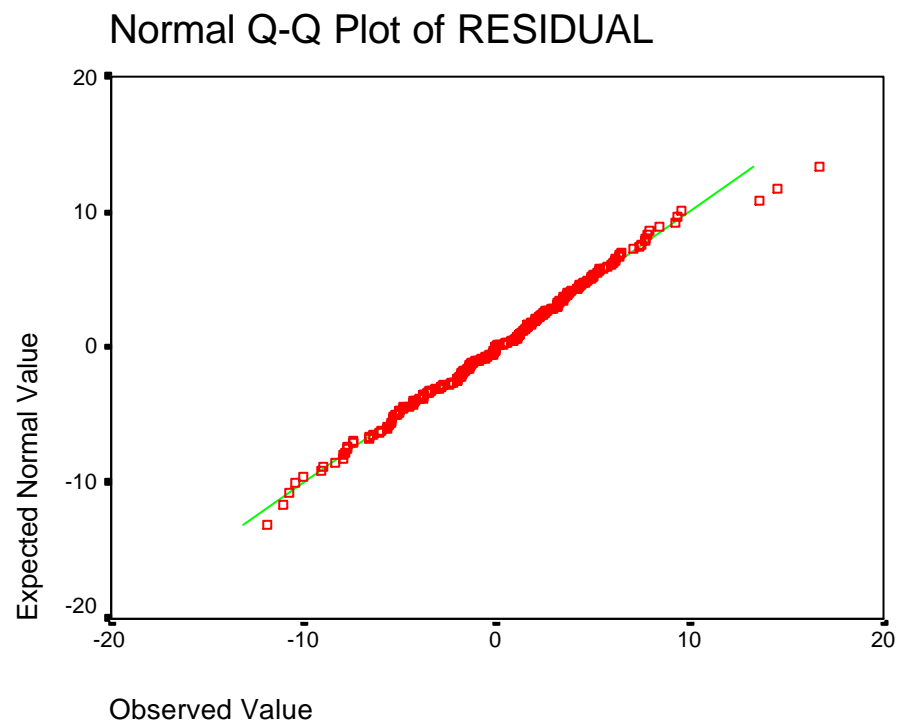
Gambar 3.3. Plot  $n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta)$  dengan  $n=100$



Gambar 3.4. Plot antara  $t$  dengan  $Y$  dan estimasi  $g(t)$  dengan  $h=0.024$



Gambar 3. 5. Plot antara Residual dan Prediksi



Gambar 3. 6. QQ Plot Residual



Dari hasil simulasi dengan  $h=0.024$  diperoleh,  $\hat{\beta}=5.164$ ,  $\hat{\sigma}_{UU} = 2.318$ .

Dari Gambar 3.1, 3.2 dan 3.3, distribusi  $n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta)$  untuk  $n$  berturut-turut 30,50 dan 100, memberikan pendekatan yang cukup bagus terhadap distribusi normal. Dari plot residual dengan prediksi pada gambar 3.5, nampak residual terlokasi secara random, yang mengindikasikan model sesuai dengan data.

Dari qq plot pada gambar 3.6, residual dapat dibentuk garis lurus, yang mengindikasikan residual mengikuti distribusi normal

## BAB IV

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 4.1. Kesimpulan

Pada Model Linear Parsial dengan Kesalahan Pengukuran,

$Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$ , komponen nonparametrik  $g(\cdot)$  diestimasi dengan estimator

Nadaraya Watson :  $\hat{g}(t) = \sum_{j=1}^n \omega_{hj}(T)(Y_j - W_j^T \beta)$ , sedangkan untuk bagian

parametrik :  $\hat{\beta}_n = (\tilde{W}^T \tilde{W} - nS_{UU})^{-1} \tilde{W}^T \tilde{Y}$

Sifat kenormalan asimtotis estimator  $\hat{\beta}_n$  adalah:

$$n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{d} N(0, B^{-1} \Gamma B^{-1}),$$

dengan  $\Gamma = E\{(\varepsilon - U^T \beta)(X - E(X|T))\}^{\otimes 2} + E\{(UU^T - \Sigma_{UU})\beta\}^{\otimes 2} + E(UU^T \varepsilon^2)$ ,

dimana  $A^{\otimes 2} = AA^T$

Bias asimtotik dan variansi asimtotik dari  $\hat{g}_n(t)$  adalah :

$$\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)g(T_i) - g(t) \text{ dan } \sum_{i=1}^n \omega_{ni}^2(t)(\beta^T \Sigma_{UU} \beta + \sigma^2)$$

#### 4.2. Saran

Untuk penelitian lebih lanjut, perlu diberikan kasus-kasus nyata yang diterapkan pada model linear parsial dengan kesalahan pengukuran, serta identifikasi variabel-variabel prediktornya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Casella, G; Berger R.L, 1990, *Statistical Inference*, Wadsworth.Inc, Belmont, California
- Chen, H, 1988, *convegence rates for parametrics component in a partly linear model*, Annals of Statistics, i6, 136-146
- Drapper N; Smith H. 1998. *Applied Regression Analysis*. John Wiley and Sons. Inc.
- Engle, R.F., Granger, C.W.J., Rice,.J. and Weiss.A. 1986, *Semiparametric estimates of the relation between weather and electicity sales*. Journal of the American Statistical Association, 81,310-320.
- Hardle,W ; Liang, Hand Gao,J. 2000. *Partially Linear Models*. Physica-Verlag Heidelberg New York.
- Hardle W. 1991. *Smoothing Techniques with implementation in S*. Springer Verlag New York.
- Pfeffer, W.F, 1993, *The Riemann approach to integration*, Cambridge University Press.
- Rohatgi, V.K, 1976, *An Introduction To Probability And Mathematical Statistics*, John Wiley and Sons.Inc. New York.
- Rudin, W, 1976, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, London
- Sen, P.K anf singer, J.K. 1990. *Large Sample Methods in statistics, an Introduction With applications*, Chapmen & Hall, London.
- Serfling, R.J. 1980. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John



Wiley & Sons. New York

Severini, T.A. and Stanoswalis, J.G. 1994. *Quasilikelihood estimation in semiparametric models*. Journal of the American Statistical Association, 89, 501-511

Wand, M.P; Jones, M.C. 1995. *Kernel Smoothing* Chapman & Hall, UK

Wayne A. Fuller and Miochale A.1978. *Regression Estimation Aftr Correction for Attenuation*. Journal of the American Statistical Association, 73,99-104.



## Lampiran 1a.

### Program Pemilihan Parameter Penghalus h

```
function [input,output]=GCV;
Beta=5;
B=Beta;
U=randn(1,200);
U=U';
S=var(U);
X=randn(1,200);
X=X';
W=X+U;
e=randn(1,200);
e=e';
T=rand(1,200);
T=T';
t=T.^3;
Y=(W*B)+t+(e-(U*B));
h=[0.09,0.08,0.07,0.06,0.05,0.04,0.10,0.011,0.12,0.12,0.013,0.014,0.015,0.016,
0.017,0.018,0.019,0.02,0.021,0.022,0.023,0.024,0.025,0.026,0.027,0.028,0.029,
0.03,0.031,0.032,0.037,0.038,0.039,0.04,0.041,0.042,0.043,0.044,0.045,0.046,
0.047,0.048,0.049,0.05,0.051,0.052,0.053,0.054,0.55,0.056,0.57,0.58,0.59,0.06,
0.061,0.062,0.06,0.064,0.65,0.66,0.68,0.69,0.7,0.8,0.9];
h=h';
m1=diag(t);
m2=diag(W);
m3=diag(Y);
m4=(ones(size(m1))*m1);
m5=(ones(size(m2))*m2);
m6=(ones(size(m3))*m3);
n=length(h);
m7=m4'-m4;
for I=1:n,
    m8=m7/h(I,1);
    m9=(ones(size(m1)));
    m10=(m8.^2)/-2;
    m11=exp(m10)/sqrt(2*pi);
    m12=(ones(size(t)));
    m13=m11*m12;
    m14=m11.*m5;
    m15=m14*m12;
    m16=m15./m13;
    m17=W-m16;
    a1=diag(m13);
    a2=(m9*a1);
```



```
a3=m11./a2';
a4=inv(m17'*m17);
a5=m17*a4*m17';
a6=diag(m12)-a3;
a7=a3+(a5*a6);
a8=(diag(m12)-a7)*Y;
a9=a8.^2;
a10=m13'*a9;
a11=a10/n;
a12=trace(a7);
a13=a12/n;
a14=(1-a13)^2;
a15=a11/a14;
g(I)=a15;
end;
gt=g';
disp(' Nilai GCV=');disp(gt);
k=min(gt)
plot(h,gt);
figure;
for i=1:n
    if gt(i)==k
        h1=h(i)
    end;
end;
```



## Lampiran 1.b.

### Program Estimasi

```
function[i,o]=estimasi;
Beta=5;
B=Beta;
n=200;
U=randn(1,200);
U=U';
S=var(U);
X=randn(1,200);
X=X';
W=X+U;
e=randn(1,200);
e=e';
T=rand(1,200);
T=T';
t=T.^3;
Y=(W*B)+t+(e-(U*B));
m1=diag(t);
m2=diag(W);
m3=diag(Y);
m4=(ones(size(m1))*m1);
m5=(ones(size(m2))*m2);
m6=(ones(size(m3))*m3);
h=input('nilai h :');
m7=m4'- m4;
m8=m7/h;
m9=(ones(size(m1)));
m10=(m8.^2)/-2;
m11=exp(m10)/sqrt(2*pi);
m12=(ones(size(t)));
m13=m11*m12;
m14=m11.*m5;
m15=m14*m12;
m16=m15./m13;
m17=W-m16;
m18=m11.*m6;
m19=m18*m12;
m20=m19./m13;
m21=Y- m20;
m22=inv(m17'*m17-n);
disp(m22);
m23=m22*m17'*m21;
m24=W*m23;
```



```
m25=Y-m24;
m26=diag(m25);
m27=m9*m26;
m28=m11.*m27;
m29=m28*m12;
m30=m29./m13;
disp(m30);
m31=Y-(m24+m30);
disp('g hat');disp(m30);
disp('e=');disp(m31);
disp('Beta=');disp(m23);
m32=m23*X+m30;
disp('Y dugaan=');disp(m32);
W1=(ones(size(W)));
W2=mean(W)*W1;
W3=(W-W2).^2;
gt=sort(m30);
disp('Beta=');disp(m23);
Sigma=((m25'*m25)/n)-(m23*S*m23)
W4=sum(W3)/199
m31;
tt=sort(t);
ee=sort(m31);
plot(ee,'*');
figure;
plot(m32,m31,'*');
figure;
plot(W,Y,'*');
figure;
plot(t,Y,'*');
figure;
plot(tt,Y,'*',tt,gt)
```



## Lampiran 1c.

### Program Replikasi b

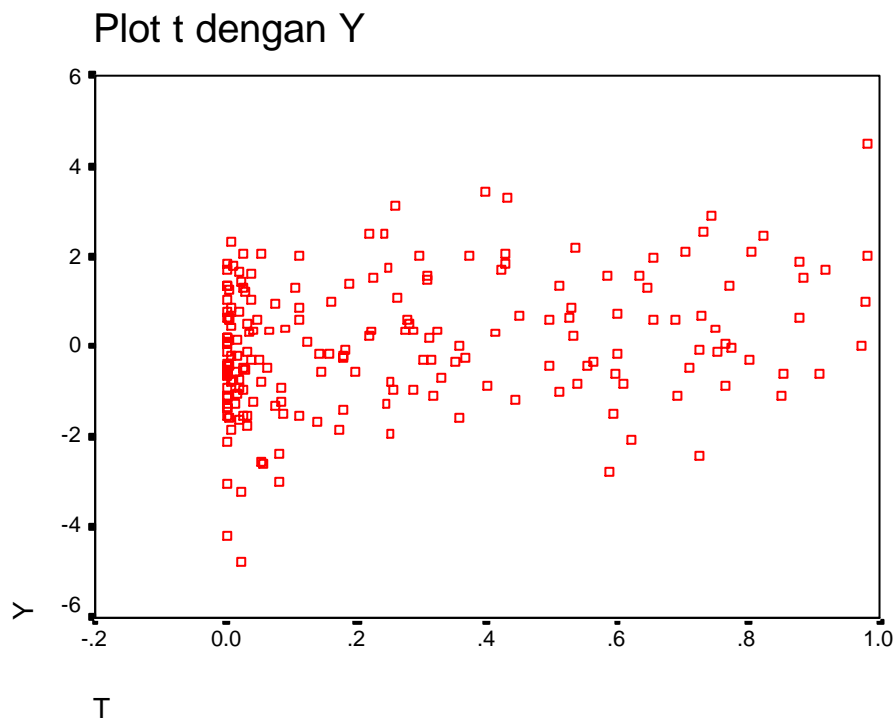
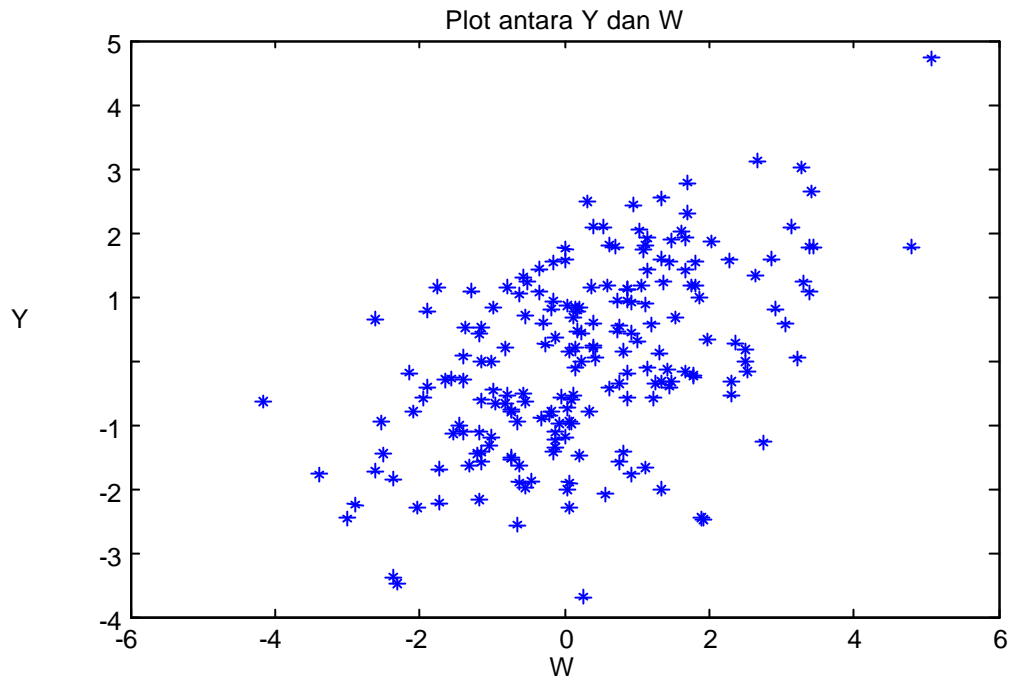
```
function [i,o]=Pivot;
ni = input('Banyak Beta = ');
for j=1:ni
Beta=5;
B=Beta;
n=200;
U=randn(1,200);
U=U';
S=var(U);
X=randn(1,200);
X=X';
W=X+U;
e=randn(1,200);
e=e';
T=rand(1,200);
T=T';
t=T.^3;
Y=(W*B)+t+(e-(U*B));
m1=diag(t);
m2=diag(W);
m3=diag(Y);
m4=(ones(size(m1))*m1);
m5=(ones(size(m2))*m2);
m6=(ones(size(m3))*m3);
h=0.024;
m7=m4'-m4;
m8=m7/h;
m9=(ones(size(m1)));
m10=(m8.^2)/-2;
m11=exp(m10)/sqrt(2*pi);
m12=(ones(size(t)));
m13=m11*m12;
m14=m11.*m5;
m15=m14*m12;
m16=m15./m13;
m17=W-m16;
m18=m11.*m6;
m19=m18*m12;
m20=m19./m13;
m21=Y-m20;
m22=inv(m17'*m17-n*S);
m23=m22*m17'*m21;
```



```
m24=W*m23;
m25=Y-m24;
m26=diag(m25);
m27=m9*m26;
m28=m11.*m27;
m29=m28*m12;
m30=m29./m13;
m31=Y-(m24+m30);
m32=m23*X+m30;
Bt(j)=m23
W1=(ones(size(W)));
W2=mean(W)*W1;
W3=(W-W2).^2;
W4=sum(W3)/199
end;
sBt=sort(Bt);
mean(Bt)
vBt=std(Bt)
Bt_norm=sqrt(ni)*(sBt-5);
pBt_norm=normpdf(Bt_norm,0,vBt);
xa=[-3:0.1:3];
f=normpdf(xa,0,vBt);
axes;
dg1=[xa' f'];
dg2=[Bt_norm' pBt_norm'];
plot(xa,f,Bt_norm,pBt_norm)
```



## Lampiran 2





UNIVERSITAS  
GADJAH MADA

**Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran**  
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD  
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari <http://etd.repository.ugm.ac.id/>