UNIVERSITAS
GADJAH MADA

Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

MODEL LINEAR PARSIAL

DENGAN KESALAHAN PENGUKURAN

TESIS

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
Mencapai derajat Sarjana S-2

Program Studi Matematika
Jurusan Ilmu-ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam



Diajukan oleh :

WIBAWATI
16562/I-4/1238/01

Kepada
PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS GADJAH MADA
YOGYAKARTA
2003

UNIVERSITAS
GADJAH MADA

Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Tesis

MODEL LINEAR PARSIAL DENGAN KESALAHAN PENGUKURAN

dipersiapkan dan disusun oleh

WIBAWATI

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji

pada tanggal : 15 Oktober 2003

Susunan Dewan Penguji

Pembimbing Utama	Anggota Dewan Penguji Lain
Prof. Drs. H. Subanar, Ph.D.	Prof. Drs. Suryo Guritno, M.Stats., Ph.D.
NIP. 130 515 731	NIP. 130 367 311

Dr. Sri Haryatmi, M.Sc.
NIP. 130 531 466

Tesis ini telah diterima sebagai salah satu persyaratan
untuk memperoleh gelar Magister

Tanggal 0 1 NOV 2003

Dr. Sri Wahyuni, MS

Pengelola Program Studi : Matematika

UNIVERSITAS
GADJAH MADA

Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam tesis ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka

Yogyakarta,

Wibawati

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

INTISARI

Model Linear Parsial Dengan Kesalahan Pengukuran

oleh

Wibawati

Di bawah bimbingan Prof. H. Subanar, Ph.D

Diberikan suatu model linear parsial dengan kesalahan pengukuran dari n sampel : $Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$, dimana X_i diukur dengan kesalahan. Sebagai pengganti pengamatan X_i, diamati : $W_i = X_i + U_i$, Dengan U_i i.i.d, independen dengan (Y_i, X_i, T_i) dengan mean 0 dan matriks kovariansinya Σ_{UU} diketahui. Sehingga model menjadi $Y_i = W_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$ *. $W_i^T \beta$ merupakan bagian parametrik dan $g(T_i)$ merupakan bagian nonperametrik.

Fungsi g(t) diestimasi dengan estimator Nadaraya Watson dan metode kuadrat terkecil digunakan untuk mengestimasi komponen parametrik. Sifat asimtotis estimator $\hat{\beta}_n$ dan $\hat{g}(t)$ diturunkan menggunakan beberapa Lemma. Contoh penggunaan metode ini dilakukan dengan studi simulasi dengan paket program matlab.

Kata Kunci : *kesalahan pengukuran, model linear parsial, regresi nonparametrik, fungsi kernel*

MILIK PERPUSTAKAAN
PROGRAM PASCA SARJANA
U G M.

UNIVERSITAS
GADJAH MADA

Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

ABSTRACT

Partially Linear Model With Measurement Error

by

Wibawati

Under the Supervision of Prof. H. Subanar, Ph.D

Given n observation partially linear model with measurement error $Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$, when X_i are measured with error. Instead of observing X_i, we observe $W_i = X_i + U_i$. U_i i.i.d, independent of (Y_i, X_i, T_i) with mean zero and covariance matrix Σ_{UU} is known. And then the model can be written as $Y_i = W_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i^*$. $W_i^T \beta$ is parametric part and $g(t_i)$ is nonparametric part.

The function g(t) is derived by using Nadaraya Watson estimator, and the least square method is used for estimate parametric part. Asymtotic properties of $\hat{\beta}_n$ and $\hat{g}(t)$ are investigated by using some lemma. The example of this method, will be illustrated by a simulation study. Matlab sofware is used for this.

Key Words : *measurement error, partially linear models, nonparametric regression, kernel function.*

UNIVERSITAS
GADJAH MADA

Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Analisis regresi merupakan metode statistik yang mempelajari pola hubungan antara variabel independen X dan variabel dependen Y. Istilah "regresi" diperkenalkan oleh Sir Francis Galton (1822-1911) yang berkaitan dengan penemuannya, hubungan tinggi badan anak (Y) dan tinggi badan orang tuanya (X) (Draper Smith, 1981). Ada dua metode yang dapat digunakan, yaitu regresi parametrik dan nonparametrik.

Jika terdapat n pengamatan saling bebas (X_i, Y_i), i=1,2,3,...,n, persamaan regresi dinyatakan sebagai berikut :

$$Y_i = g(X_i) + \varepsilon_i,\ i=1,2,3,...,n \qquad (1.1)$$

Dengan g fungsi regresi tidak diketahui, ε_i, i=1,2,3,...,n merupakan variabel kesalahan random.

Model regresi dengan menganggap bahwa bentuk fungsi g(.) diketahui disebut model regresi parametrik, sedangkan jika bentuk fungsi g(.) tidak diketahui disebut model regresi nonparametrik.

Pada pendekatan nonparametrik akan lebih fleksibel untuk mencari kurva estimator yang sesuai dengan data karena model tidak ditentukan lebih dahulu seperti pada model parametrik.

Jika sebagian variabel random independen mempunyai hubungan fungsional dengan variabel respon dalam bentuk spesifikasi tertentu, sedangkan variabel

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

independen lainnya mempunyai hubungan fungsional dalam bentuk fungsional tidak tertentu, maka digunakan pendekatan dengan model linear parsial. Dengan model $Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$. X_i dan T_i merupakan vektor variabel penjelas, yang merupakan titik design tidak random (fixed). Fungsi g merupakan fungsi yang tidak diketahui dan $\beta = (\beta_1,\beta_2,...,\beta_p)^T$ merupakan parameter tidak diketahui, ε_i, i=1,2,3,...,n merupakan kesalahan random dengan mean 0 dan variansi tetap (pola homoskesdastisitas).

Pada kasus model linear parsial dengan kesalahan pengukuran yaitu kovariat X_i diukur dengan kesalahan, sebagai pengganti pengamatan X_i , diamati :

$$W_i = X_i + U_i$$

Dimana kesalahan ukuran U_i i.i.d, independen dengan (Y_i, X_i, T_i) dengan mean 0 dan matriks kovariansinya Σ_{UU} diasumsikan diketahui.

1.2. Permasalahan

Permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan estimasi parameter dan sifat normalitas asimtotis $\hat{\beta}_n$ pada model liner parsial dengan kesalahan pengukuran

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini adalah menentukan estimasi parameter dan sifat normalitas asimtotis $\hat{\beta}_n$ pada model linear parsial dengan kesalahan pengukuran.

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

1.4. Tinjauan Pustaka

Dalam praktek, penerapan dari model linear parsial banyak sekali. Engle, Granger, Rice dan Weiss (1966), yang pertama kali menggunakan model ini. Mereka menganalisa hubungan antara temperatur dan penggunaan listrik.

Speckman (1988) menerapkan model linear parsial pada percobaan obat kumur.

Sedangkan untuk model dengan kesalahan pengukuran telah diteliti oleh Fuller (1987), Carrol, Rupper and Stefanskim (1995). Andrew Chesher (1991) meneliti tentang efek dsri kesalahan pengukuran.

Green, Jennison dan Seheult (1985), Goa (1992) telah mempelajari sifat-sifat asimtotis dari estimator dengan kuadrat terkecil pada kasus design titik non random

Engle, Grangeerm Rice dan Weiss (1986), Heckman (1996), rice (1986) Whaba (1990), Green dan Silverman (1994) dan Eubank, Kambour, Kim, Klipple, reese dan Schimek (1998) menggunakan teknik penghalusan untuk penakasiran parameter.

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

BAB II

PENGERTIAN DASAR

2.1. Regresi Parametrik

Analisis regresi merupakan metode statistik yang mempelajari pola hubungan antara variabel independen X dan veriabel dependen Y. Diberikan n pasangan pengamatan $\{(X_i,Y_i)\}_{i=1}^{n}$. Pandang model regresi :

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i,\ i=1,2,...,n \qquad (2.1)$$

Dimana Y_i merupakan variabel respon, X_i variabel prediktor dan ε_i kesalahan random, dengan asumsi tidak berkorelasi dan mean 0.

Asumsi pada regresi parametrik adalah bentuk fungsi regresi m(.) diketahui, kecuali untuk sejumlah berhingga parameter yang tidak diketahui, yaitu ada vektor parameter $\beta = (\beta_1, \beta_2,...,\beta_p)^T$ dan ada fungsi $m(.;\beta)$ sehingga $m(.) = m(.;\beta)$. Fungsi regresi $m(.;\beta)$, dapat berbentuk linear dalam parameter ataupun non linear. Fungsi disebut non linear jika minimal non linear dalam satu parameter. Dan disebut linear jika terdapat fungsi diketahui $f_1,f_2,...,f_p$ sedemikian hingga $m(x) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j f_j(x_i)$. Akan tetapi dalam tulisan ini dibatasi pada model yang linear saja. Sehingga jika terdapat $\{(X_i,Y_i)\}_{i=1}^{n}$, pengamatan, maka model akan menjadi :

$$Y_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_j f_j(x_i) + \varepsilon_i;\ i=1,2,...,n \qquad (2.2)$$

Model diatas jika dituliskan dalam notasi matriks akan menjadi :

$$\mathbf{Y}=\mathbf{X}b + e$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Dimana $\mathbf{Y}= (y_1,y_2,..,y_n)^T$, $b = (\beta_1,\beta_2, ...,\beta_p)^T$ dan $e = (\varepsilon_1, \varepsilon_2,..., \varepsilon_n)^T$, dengan asumsi $\varepsilon_i \sim \mathbf{(0,}\ s^2\mathbf{I_n})$.

Dengan model (2.2), untuk mengestimasi m ekuivalen dengan mengestimasi koefisien-koefisien regresi yaitu $b = (\beta_1,\beta_2, ,\beta_p)^T$.

Ada beberapa metode panaksiran parameter regresi, salah satunya metodekuadrat terkecil. Metode ini meminimalkan e^Te terhadap b. Dari persamaan diatas :

$$\mathbf{Y}=\mathbf{X}b + e$$

Maka $e = \mathbf{Y} - \mathbf{X}b$

Sehingga

$$e^Te = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}b)^T(\mathbf{Y} - \mathbf{X}b) = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}^T\mathbf{X}b + b^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}b$$

$$\partial e^Te / \partial b = 0 - 2\mathbf{X}^T\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^T\mathbf{X}b = 0$$

maka $- 2\mathbf{X}^T\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^T\mathbf{X}b = 0$ sehingga $\mathbf{X}^T\mathbf{X}b = \mathbf{X}^T\mathbf{Y}$

$$\hat{b} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}^T\mathbf{Y}) \qquad (2.3)$$

Karena $\partial^2 e^Te / \partial b \partial b^T = 2\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ merupakan matriks definit positif, maka $\hat{b}$ akan meminimumkan e^Te dan $\hat{b}$ dinamakan estimator kuadrat terkecil untuk b.

Dengan sifat estimator tersebut :

1. $\hat{b}$ merupakan penaksir yang tak bias untuk b
2. $\mathrm{Var}(\hat{b}) = s^2(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$
3. $\hat{b}$ merupakan penaksir terbaik, yang berarti diantara semua panaksir linear takbias untuk b, $\hat{b}$ mempunyai variansi minimal.

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

2.2. Regresi Non Parametrik

Motode regresi nonparametrik mulai dikenal sejak abad XIX. Namun perkembangannnya tidak begitu pesat dibanding dengan pendekatan parametrik. Namun seiring dengan perkembangan bidang komputasi, regresi nonparametrik mengalami perkembangan yang begitu pesat.

Untuk n pasangan pengamatan $\{(T_i,Y_i)\}_{i=1}^{n}$, diberikan model regresi nonparametrik sebagai berikut :

$$Y_i = g(T_i) + \varepsilon_i,\ i=1,2,3,...,n \qquad (2.4)$$

Dimana Y_i merupakan variabel respon, T_i variabel prediktor dan ε_i kesalahan random, dengan asumsi tidak berkorelasi dan mean 0.

Dalam regresi nonparametrik tidak ada asumsi tentang bentuk fungsi regresi g(.). Hal ini memberikan *flexibilitas* yang lebih besar didalam bentuk yang mungkin dari fungsi regresi. Untuk mengkonstruksi model regresi nonparametrik terlebih dahulu dipilih ruang fungsi yang sesuai, dimana fungsi regresi g(.) diyakini termasuk didalamnya. Pemilihan ruang fungsi ini biasanya dimotivasi oleh sifat kelicinan yang diasumsikan dimiliki oleh fungsi regresi.

Ada beberapa teknik untuk mengestimasi fungsi regresi g(.), salah satunya adalah dengan estimator kernel. Sebagai contoh estimator kernel untuk fungsi regresi g(.) :

$$\hat{g}_n(t) = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_h(t-T_i)Y_i}{n^{-1}\sum_{j=1}^{n} K_h(t-T_j)}$$

dimana h : lebar pita (*bandwidth*); $K_h(t)=h^{-1}K(t/h)$, dan K disebut fungsi kernel

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

2.2.1. Fungsi Kernel

Diberikan suatu sampel random X_i, i=1,2,3,...,n iid. Karakteristik dasar yang menggambarkan kalakuan dari suatu variabel random adalah fungsi densitas f dari sampel random tersebut. Berdasarkan sampel random ini akan diestimasi fungsi densitas f yang tidak diketahui dengan pendekatan kernel. Kernel K didefinisikan (Hardle, 1990) :

$$K_h(t) = \frac{1}{h} K\left(\frac{t}{h}\right)$$

dengan h adalah *bandwidth.* Fungsi densitas f diestimasi dengan :

$$\hat{f}_h(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h(t - T_i) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{t - T_i}{h}\right) \qquad (2.5)$$

Definisi 2.1.

Kernel K adalah fungsi bernilai real, kontinyu, terbatas, simetri dan integralnya sama dengan 1. $\int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt = 1$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} t\,K(t)dt = 0$

Beberapa fungsi kernel (Hardle1990) :

Uniform	$\frac{1}{2} I(\lvert u\rvert \le 1)$
Triangle	$(1 - \lvert u\rvert) I(\lvert u\rvert \le 1)$
Epanechnikov	$\frac{3}{4}(1 - u^2) I(\lvert u\rvert \le 1)$
Quartic	$\frac{15}{16}(1 - u^2)^2 I(\lvert u\rvert \le 1)$
Triweight	$\frac{35}{32}(1 - u^2)^3 I(\lvert u\rvert \le 1)$
Gaussian	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} u^2)$
Cosinus	$\frac{\pi}{4} \mathrm{Cos}(\frac{\pi}{4} u) I(\lvert u\rvert \le 1)$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Dari definisi kernel diatas maka : $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_h(t)dt = 1$

Bukti :

Ambil $s_i = \frac{t - T_i}{h}$ → $s_i h = t - T_i$ dan $dt = h\, ds_i$, sehingga persamaan (2.5) menjadi :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_h(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h(t - T_i)dt = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} K(s_i)h\,ds_i = \frac{1}{n}\left[n\int_{-\infty}^{\infty} K(s_i)ds_i \right] = 1 .$$

Estimator kernel untuk fungsi densitas bersama variabel random T dan Y diperoleh dengan kernel multiplikatif :

$$\hat{f}_{h1h2}(t, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t - T_i)K_{h2}(y - Y_i) \qquad (2.6)$$

Lemma 2.1

Jika $\hat{f}_{h1h2}(t, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t - T_i)K_{h2}(y - Y_i)$ maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\hat{f}_{h1h2}(t, y)dy = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t - T_i)Y_i \qquad (2.7)$$

Bukti :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} y\hat{f}_{h1h2}(t, y)dy &= n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t - T_i)\int_{-\infty}^{\infty} yK_{h2}(y - Y_i)dy \\
&= n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t - T_i)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{h_2} K\left(\frac{y - Y_i}{h_2}\right)dy \\
&= n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t - T_i)\int_{-\infty}^{\infty} (s_i h_2 + Y_i)K(s_i)ds_i , \qquad \text{subt} : y = Y_i + s_i h_2 \\
&= n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t - T_i)Y_i
\end{aligned}$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Selanjutnya estimator kernel untuk model regresi nonparametrik $Y_i = g(T_i) + \varepsilon_i$ Dikonstruksikan sebagai berikut :

Kurva regresi : $$g(t) = E(Y|T = t) = \frac{\int yf(t, y)dy}{f(t)} \quad (2.8)$$

dimana f(t,y) merupakan fungsi densitas bersama (T,Y) dan f(t) fungsi densitas marginal untuk T.

Estimator natural untuk g(t) adalah dengan mengganti pembilang dan penyebut pada persamaan (2.8), (2.5) dan (2.7) dengan mengambil *bandwidth* yang sama yaitu h, maka diperoleh :

$$\hat{g}_n(t) = \frac{\int y\hat{f}_{h1h2}(t, y)dy}{\hat{f}_h(t)}$$

$$\hat{g}(t) = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_h(t - T_i)Y_i}{n^{-1}\sum_{j=1}^{n} K_h(t - T_j)} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t)Y_i \quad (2.9)$$

dengan $$W_{ni}(t) = \frac{K_h(t - T_i)}{n^{-1}\sum_{j=1}^{n} K_h(t - T_j)}$$

Persamaan (2.9) telah di temukan oleh Nadaraya (1964) dan Watson (1964). Oleh karena itu estimator ini sering disebut “Estimator Nadaraya Watson”.

Karena persamaan (2.9) tergantung pada nilai h, maka nilai-nilai ekstrim untuk h mengakibatkan :

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

- Anggap estimator kernel hanya dihitung pada pengamatan {Ti : i=1,2,..,n}

  Maka jika h→0, $\hat{g}_n(T_i) \to \dfrac{K(0)Y_i}{K(0)} = Y_i$

  Jadi *bandwidth* (h) sangat kecil, estimator akan menuju ke data

- Jika h→∞ maka $K\left(\dfrac{t-T_i}{h}\right) \to K(0)$, akibatnya

$$\hat{g}_n(T_i) \to \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K(0)Y_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K(0)} = \frac{n^{-1}K(0)\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n^{-1}\left(\, nK(0)\,\right)} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \overline{Y}$$

Jadi *bandwidth* (h) sangat besar, estimator akan sangat mulus dan menuju rata-rata dari variabel respon.

Jika diambil $\omega_{ni}(t) = \dfrac{K_h(t-T_i)}{\sum_{j=1}^{n} K_h(t-T_j)}$ maka estimator g(t) ekuivalen dengan :

$$\hat{g}(t) = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_h(t-T_i)Y_i}{n^{-1}\sum_{j=1}^{n} K_h(t-T_j)} = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(t)Y_i$$

2.3. MODEL LINEAR PARSIAL

Model Linear Parsial merupakan gabungan dari regresi parametrik dan regresi nonparametrik. Model linear parsial mengasumsikan data $\{(X_i, T_i, Y_i) : i=1,2,...,n\}$ mempunyai bentuk :

$$Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i . \qquad (2.10)$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

X_i dan T_i merupakan vektor variabel penjelas, yang merupakan titik design tidak random (fixed). g merupakan fungsi yang tidak diketahui dan $\beta = (\beta_1,\beta_2,...,\beta_p)^T$ merupakan parameter tidak dikatahui, ε_i , i=1,2,3,...,n merupakan kesalahan random dengan mean 0 dan variansi tetap (pola homoskesdastisitas). $X_i^T\beta$ merupakan komponen parametrik, dimana estimasinya dilakukan dengan metode Least Square. $g(T_i)$ merupakan komponen nonparametrik, dimana estimasinya menggunakan estimator kernel.

2.3.1 Estimasi parameter

Dalam model linear parsial pada persamaan (2.10), g dan β merupakan fungsi dan parameter yang akan diestimasi dari data. Estimasi g menggunakan estimator kernel dan β menggunakan metode kuadrat terkecil.

Jadi β adalah parameter sebenarnya, persamaan (2.10) dapat dinyatakan sebagai :

$$Y_i - X_i^T\beta = g(T_i) + \varepsilon_i \tag{2.11}$$

Jika $Y_i^* = Y_i - X_i^T\beta$, maka dengan menggunakan teori regresi diperoleh :

$$g(t) = E(Y^* \mid T = t) = \frac{\int y^* g(t, y^*)dy^*}{g(t)} \tag{2.12}$$

Untuk fungsi densitas bersama g(t,Y*) diestimasi dengan pergandaan kernel

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

$$\hat{g}_{h1h2}(t,y^*) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t-T_i)K_{h2}(y^*-Y_i^*)$$

$$\int y^*\hat{g}_{h1h2}(t,y^*)dy^* = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t-T_i)\int \frac{y^*}{h_2}K\left(\frac{y^*-Y_i^*}{h_2}\right)dy^*$$

$$= n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t-T_i)\int (sh_2+Y_i^*)K(s)ds$$

$$= n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t-T_i)Y_i^*$$

Sehingga diperoleh :

$$\hat{g}_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_h(t-T_i)Y_i^*}{\sum_{j=1}^{n} K_h(t-T_j)} = \sum_{i=1}^{n}\omega_{ni}(t)(Y_i - X_i^T\beta) \qquad (2.13)$$

dimana :

$$\omega_{hi}(t) = \frac{K_h(t-T_i)}{\sum_{j=1}^{n} K_h(t-T_j)} = \frac{K\left(\frac{t-T_i}{h}\right)}{\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{t-T_j}{h}\right)}$$

Selanjutnya $\hat{g}_n(t)$ menggantikan g(t) pada persamaan (2.10), sehingga didapatkan model estimasi sebagai berikut :

$$Y_i = X_i^T\beta + \hat{g}(T_i) + \varepsilon_i \qquad (2.14)$$

Berdasarkan model diatas, dengan menggunakan metode kuadrat terkecil diperoleh taksiran β dengan meminimumkan $\varepsilon'\varepsilon$ sebagai berikut :

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

$$\begin{aligned}
\varepsilon^T\varepsilon &= \sum_{i=1}^{n}\left[Y_i - X_i^T\beta - \hat{g}_n(T_i)\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[Y_i - X_i^T\beta - \sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)\left(Y_j - X_j^T\beta\right)\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[Y_i - X_i^T\beta - \sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)Y_j + \sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)X_j^T\beta\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(Y_i - \sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)Y_j\right) - \left(X_i^T - \sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)X_j^T\right)\beta\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{Y}_i - \tilde{X}_i^T\beta\right)^2 = \left(\tilde{Y}_i - \tilde{X}\beta\right)^T\left(\tilde{Y}_i - \tilde{X}\beta\right) \\
&= \tilde{Y}^T\tilde{Y} - \beta^T\tilde{X}^T\tilde{Y} - \tilde{Y}^T\tilde{X}\beta + \beta^T\tilde{X}^{T'}\tilde{X}\beta
\end{aligned}$$

Karena $\beta^T\tilde{X}^T\tilde{Y} = \left(\beta^T\tilde{X}^T\tilde{Y}\right)^T = \tilde{Y}^T\tilde{X}\beta$, maka persamaan menjadi :

$$\varepsilon^T\varepsilon = \tilde{Y}^T\tilde{Y} - 2\beta^T\tilde{X}^T\tilde{Y} + \beta^T\tilde{X}^T\tilde{X}\beta \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial\varepsilon^T\varepsilon}{\partial\beta} = 0$$

maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
-2\tilde{X}^T\tilde{Y} + \tilde{X}^T\tilde{X}\hat{\beta}_n &= 0 \\
\tilde{X}^T\tilde{Y} &= \tilde{X}^T\tilde{X}\hat{\beta}_n
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Persamaan diatas merupakan persamaan normal. Dengan asumsi matriks $\tilde{X}$ mempunyai rank penuh maka persamaan (2.16) mempunyai persamaan tunggal :

$$\hat{\beta}_n = \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T\tilde{Y} \tag{2.17}$$

Karena $\frac{\partial^2\varepsilon^T\varepsilon}{\partial\beta\partial\beta^T} = 2\tilde{X}^T\tilde{X}$ merupakan matriks definit positif maka $\hat{\beta}_n$ merupakan estimator kuadrat terkecil untuk β, dengan

$$\tilde{X}_i = \left[X_i - \sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)X_j\right]$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

$$\tilde{\tilde{Y}}_i = \left[Y_i - \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i) Y_j \right]$$

$$\tilde{\tilde{Y}}^T = (\tilde{\tilde{Y}}_1, \tilde{\tilde{Y}}_2, ..., \tilde{\tilde{Y}}_n)$$
$$\tilde{\tilde{X}}^T = (\tilde{\tilde{X}}_1, \tilde{\tilde{X}}_2, ..., \tilde{\tilde{X}}_n)$$

Setelah mendapatkan $\hat{\beta}_n$, maka β pada persamaan (2.13) diganti dengan $\hat{\beta}_n$, untuk menghitung $\hat{g}_n(t)$.

$$\hat{g}_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(t)(Y_i - X_i^T \hat{\beta})$$

2.3.2. Sifat Asimtotik Estimator

Untuk mendapatkan sifat-sifat asimtotik estimator diperlukan beberapa definisi, teorema dan asumsi berikut :

Definisi 2.2. (Rudin, W, 1976)

Fungsi g dikatakan kontinyu di x bila untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $\delta>0$ sedemikian hingga untuk setiap y dalam domain fungsi dengan $|x-y| < \delta$ berlaku $|g(x)-g(y)| < \varepsilon$

Definisi 2.3. (Pfeffer, W.F, 1993)

Fungsi g dikatakan kontinyu Lipschitz pada [a,b] bila terdapat konstanta M > 0 sedemikian hingga $|g(x)-g(y)| < M|x-y|$. untuk setiap x,y dalam [a,b]

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Definisi 2.4

Konvergen Dalam Probabilitas (Casella, Berger, 1990)

Barisan variabel random $X_1,X_2,X_3,...$ konvergen dalam probabilitas ke suatu variabel random X jika untuk setiap $\varepsilon>0$, $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon\right) = 0$ atau

$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - X\right| < \varepsilon\right) = 1$ atau biasa ditulis $X_n \xrightarrow{p} X$ atau $X_n \xrightarrow{L} X$

Definisi 2.5.

Konvergen Hampir Pasti (Casella, Berger, 1990)

Barisan variabel random $X_1,X_2,X_3,...$ konvergen hampir pasti ke suatu variabel randon X, jika untuk setiap $\varepsilon>0$, $P(\lim_{n\to\infty}\left|X_n - X\right| < \varepsilon) = 1$ atau biasa ditulis

$X_n \xrightarrow{a.s} X$

Definisi 2.6.

Konvergen Dalam Distribusi (Casella, Berger, 1990)

Barisan variabel random $X_1,X_2,X_3,...$ konvergen dalam distribusi ke suatu variabel random X, jika $\lim_{n\to\infty} F_{Xn}(x) = F_X(x)$ pada setiap titik x dimana F_X (x) kontinyu.

Atau biasa ditulis $X_n \xrightarrow{d} X$

Teorema 2.1.

Strong Law of Large Number (Casella, Berger, 1990)

Jika X_i, i=1,2,... variabel random i.i.d. dengan mean $\mu<\infty$, maka

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{a.s} \mu \quad \text{untuk } n \to \infty$$

Teorema 2.2.

Weak Law of Large Number (Casella, Berger, 1990)

Jika X_i, i=1,2,... variabel random i.i.d. dengan mean $\mu < \infty$, maka

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{p} \mu \quad \text{untuk } n \to \infty$$

Definisi 2.7. (Serfling, R.J, 1980)

Barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ dinyatakan sebagai $a_n = O(b_n)$ jika terdapat bilangan real M sedemikian sehingga $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = M$

Definisi 2.8. (Serfling, R.J, 1980)

Barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ dinyatakan sebagai $a_n = o(b_n)$ jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

Dengan sifat dari "O" :

- jika $a_{n1} = O(b_{n1})$, $a_{n2} = O(b_{n2})$ maka $a_{n1} + a_{n2} = O(b_{n1} + b_{n2})$
- jika $\alpha > 0$ adalah konstanta, $a_n = O(\alpha\, b_n)$ maka $a_n = O(b_n)$
- jika $a_{n1} = O(b_{n1})$, $a_{n2} = O(b_{n2})$ maka $a_{n1} \,.\, a_{n2} = O(b_{n1} \,.\, b_{n2})$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Jika f(x) dan g(x) adalah fungsi dengan g(x)>0, sifat-sifat dari O(.) dan o(.), (Rohatgi, 1976):

- $f_1(x) = O[g_1(x)],\ f_2(x) = O[g_2(x)] \Rightarrow f_1(x) + f_2(x) = O\,[g_1(x) + g_2(x)]$
- $\alpha > 0$ adalah konstanta, $f(x) = O[\alpha g(x)] \Rightarrow\ f(x) = O[g(x)]$
- $f_1(x) = O[g_1(x)],\ f_2(x) = O[g_2(x)] \Rightarrow f_1(x) \,.\, f_2(x) = O\,[g_1(x) \,.\, g_2(x)]$
- $f(x) = o[g(x)] \Rightarrow f(x) = O\,[g(x)]$
- $f_1(x) = O[g_1(x)],\ f_2(x) = o[g_2(x)] \Rightarrow f_1(x) \,.\, f_2(x) = o\,[g_1(x) \,.\, g_2(x)]$

Definisi 2.9. (Serfling, R.J, 1980)

Barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ dinyatakan sebagai $a_n = O_p(b_n)$ jika terdapat bilangan real M dan N sedemikian sehingga $P\left\{\left|\frac{a_n}{b_n}\right| > M\right\} \le \varepsilon, \quad \nabla n > N$

Definisi 2.10. (Serfling, R.J, 1980)

Barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ dinyatakan sebagai $a_n = o_p(b_n)$ jika untuk semua $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \ge \varepsilon\right\} = 0$

Teorema 2.3 Teorema Limit Pusat (Casella, Berger, 1990)

Misalkan X_i, i=1,2,... variabel random i.i.d. yang mempunyai mgf ($M_x(t)$ ada untuk $|t|<h$, untuk beberapa h positif). Misal $E(x_i) = \mu$ dan $var(x_i) = \sigma^2$.

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Didefinisikan $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $G_n(x)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif dari $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/\sigma$. Maka untuk sembarang x, $-\infty<x<\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy,$$ yaitu $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/\sigma$ berdistribusi normal standart.

Teorema 2.4 (Sen, P.K dan Singer,1993)

Jika $\{X_i\}$ merupakan vektor random i.i.d pada R^p dengan mean μ_i dan matriks kovarian Σ_i, maka :

$$n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \xrightarrow{d} N(0,\Sigma), \Sigma = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\Sigma_i$$

Teorema 2.5. (Sen, P.K dan Singer,1993)

Jika $Z\sim N(\mu,\Omega)$ dan A adalah suatu matriks, maka vektor $U=AZ\sim N(A\mu, A\Omega A^T)$

Jika komponen $X_i=(X_{ij})$. Didefinisikan : $h_j(T_i) = E(X_{ij} \mid T_i)$ dan $V_i = X_i - E(X_i \mid T_i)$

$1 \le i \le n$, $1 \le j \le p$

Asumsi 1.

$\sup_{0\le t\le 1} E\|X_1\|^4 T = t) < \infty$ dan $B=E(V_1 V_1^T)$ adalah matriks definit positif

Jika (X_i, T_i) adalah titk rancangan tetap, ada fungsi kontinyu yang didefinisikan pada [0,1] sedemikian hingga masing-masing komponen X_i memenuhi :

$$X_i = h_j(T_i) + V_i, \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le p \qquad (2.18)$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA

Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Dengan $\{V_i\}$ adalah barisan bilangan real yang memenuhi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V_i V_i^T = B \tag{2.19}$$

dan

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{a_n} \max_{1\le k\le n} \left| \sum_{i=1}^{k} V_i \right| < \infty \tag{2.20}$$

dengan $V_i = (V_{i1},\ldots,V_{ip})^T$, $a_n = n^{1/2}\log n$ dan B matriks definit positif

Asumsi 2.

g (.) dan h_j(.) kontinyu Lipschitz

Asumsi 3. Fungsi bobot ω_{ni}(.) memenuhi :

i). $\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i) = O_P(1)$

ii). $\max_{1\le i,j\le n} \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(T_j) = O_P(b_n)$

iii). $\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i) I(|T_j - T_i| > c_n) = O_P(c_n)$

dimana $b_n = n^{-2/3}$ log n dan $c_n = n^{-1/3}$ log n..

Lemma 2.2.

Jika asumsi 1,2,3 dipenuhi maka $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X} = B$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

2.3.2.1. Sifat kenormalan

Dari lemma 2.2 dengan B adalah matriks definit positif, maka $\tilde{X}^T\tilde{X} = O(n)$, artinya terdapat bilangan real M_1, sedemikian hingga :

$$\frac{1}{n}(\tilde{X}^T\tilde{X}) \le M_1 \tag{2.21}$$

dengan $E(\tilde{X}^T\varepsilon) = 0$ dan $Var(\tilde{X}^T\varepsilon) = \sigma^2\tilde{X}^T\tilde{X}$

Menurut pertidaksamaan Chebyshev, yaitu jika variabel random dengan mean μ dan variansi berhingga $\forall\delta$ berlaku :

$$P\left[|Z-\mu| \ge \delta\right] \le E\left[\frac{(Z-\mu)^2}{(\delta)^2}\right] \tag{2.22}$$

dipilih $\delta = n^{1/2}M_2$ pada persamaan (2.22) dan menggunakan pertidaksamaan (2.21) terhadap variabel random $\tilde{X}^T\varepsilon$, maka untuk setiap $M_2>0$ berlaku :

$$P\left[\left|\tilde{X}^T\varepsilon - 0\right| \ge n^{1/2}M_2\right] \le \left[\frac{\sigma^2\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^2}{nM_2^2}\right] \le \sigma^2\frac{M_1}{M_2^2}$$

atau $P\left[\left|n^{-1/2}\tilde{X}^T\varepsilon\right| \ge M_2\right] \le \sigma^2\frac{M_1}{M_2^2}$ (2.23)

jika untuk sebarang $\varepsilon_1>0$ dipilih M_2 sehingga $\sigma^2\frac{M_1}{M_2^2} \le \varepsilon_1$ maka

$$M_2 \ge \sqrt{\frac{\sigma^2 M_1}{\varepsilon_1}} = \sigma\left(\frac{M_1}{M_2^2}\right)^{1/2}$$

Sehingga persamaan (2.23) dapat ditulis menjadi :

$$P\left[\left|n^{-1/2}\tilde{X}^T\varepsilon\right| \ge M_2\right] \le \varepsilon_1 \tag{2.24}$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

berdasarkan definisi 2.9 dan 2.10 order dalam probabilitas maka pertidaksamaan (2.24) menjadi $\tilde{X}^T\varepsilon = O_p(n^{1/2})$ atau dinyatakan sebagai :

$$\tilde{X}^T\varepsilon = o_p(n) \tag{2.25}$$

Akan diselidiki distribusi asimtotis dari $n^{-1/2}\tilde{X}^T\varepsilon$ dengan menggunakan teorema 2.4. Untuk menerapkan teorema limit pusat terhadap $n^{-1/2}\tilde{X}^T\varepsilon$, dimisalkan $\tilde{X}_i$ vektor px1 yaitu baris ke-i dari matriks $\tilde{X}$ dan $Z_i = \tilde{X}_i\varepsilon_i$, maka :

Var(Z_i) = $V_i = \sigma^2\tilde{X}_i\tilde{X}_i^T$

$$\begin{aligned}\Sigma &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}V_i \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\tilde{X}_i\tilde{X}_i^T \\ &= \sigma^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\tilde{X}^T\tilde{X} = \sigma^2 B\end{aligned}$$

Jadi $$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{X}^T\varepsilon \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2 B) \tag{2.26}$$

Persamaan $Y_i = X_i^T\beta + \hat{g}(t_i) + \varepsilon_i$ dapat dipandang sebagai $\tilde{Y} = \tilde{X}\beta + \varepsilon$ sehingga dperoleh :

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_n &= \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T\tilde{Y} \\ \hat{\beta}_n &= \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T\left(\tilde{X}\beta + \varepsilon\right) \\ \hat{\beta}_n &= \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T\tilde{X}\beta + \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T\varepsilon \\ \hat{\beta}_n &= \beta + \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T\varepsilon \end{aligned} \tag{2.27}$$

Atau $\hat{\beta}_n - \beta = \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T\varepsilon$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Kemudian dihitung :

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\hat{\beta}_n-\beta) &= \sqrt{n}\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T\varepsilon \\ &= n\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T\varepsilon \\ &= n\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\frac{\tilde{X}^T\varepsilon}{\sqrt{n}} \\ &= \left(\frac{1}{n}\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\frac{\tilde{X}^T\varepsilon}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dari persamaan (2.26) maka persamaan (2.28) menjadi

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n-\beta)\xrightarrow{d} B^{-1}Z \text{ dimana } Z\sim N(0,\sigma^2B) \quad (2.29)$$

Dengan menggunakan teorema (2.5), maka untuk persamaan (2.29), jika $Z\sim N(0, \sigma^2B)$ maka $B^{-1}Z \sim N(0, \sigma^2 B^{-1}BB^{-1})$, sehingga

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_n-\beta\right)\xrightarrow{d} N(0,\sigma^2B^{-1}) \quad (2.30)$$

2.3.2.2. Sifat Konsisten

Estimator kuadrat terkecil $\hat{\beta}_n$ konsisten untuk β artinya $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\beta}_n-\beta\right|<\varepsilon\right)=1$ atau bisa dituliskan plim $\hat{\beta}_n=\beta$.

Dari persamaan (2.27)

$$\hat{\beta}_n=\beta+\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T\varepsilon$$

$$\hat{\beta}_n=\beta+\left(\frac{1}{n}\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\frac{1}{n}\tilde{X}^T\varepsilon$$

$$p\lim\hat{\beta}_n=\beta+p\lim\left(\frac{1}{n}\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\frac{1}{n}\tilde{X}^T\varepsilon$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

$$\text{p lim } \hat{\beta}_n = \beta + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1} \text{p lim } \frac{1}{n}\tilde{X}^T\varepsilon$$

$$\text{p lim } \hat{\beta}_n = \beta + B^{-1}.0 \quad \text{dari lemma 2.3 dan persamaan 2.25}$$

$$\text{p lim } \hat{\beta}_n = \beta$$

2.3.3. Pemilihan Bandwith

Wahba (1975), Craven dan Wahba (1979) dan Golub, Heath dan Wahba (1979) telah memperkenal kriteria pemilihan *Bandwith* (h) yang optimal dengan menggunakan kriteria GCV (Generalized Cross-Validation) :

$$GCV(h) = RSS(h)/[1-n^{-1}tr(A(h))]^2$$

Dari persamaan (2.10), $Y_i = X_i^T\beta + g(T_i) + \varepsilon_i$, i=1,2,,3,...,n, dinyatakan dalam bentuk matriks :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{g} + e \qquad (2.31)$$

Didefinisikan $\hat{Y}$ adalah estimator dari E(**Y**) yang bergantung pada h yaitu :

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= X\hat{\beta}_n + \hat{g}\\ &= X\hat{\beta}_n + W(Y - X\hat{\beta}_n)\\ &= X\hat{\beta}_n + WY - WX\hat{\beta}_n\\ &= WY + (1-W)X\hat{\beta}_n\\ &= WY + \tilde{X}\hat{\beta}_n\end{aligned}$$

Didefinisikan $\hat{Y} = A(h)Y$, $GCV(h) = RSS(h)/[1-n^{-1}tr(A(h))]^2$

RSS(h) merupakan rata-rata jumlah kuadrat error

$$RSS(h) = n^{-1}\left\|Y - \hat{Y}\right\|^2 = n^{-1}\left\|Y - A(h)Y\right\|^2 = n^{-1}\left\|(I - A(h))Y\right\|^2 \qquad (2.32)$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Sehingga :

$$A(h)Y = \hat{Y}$$
$$A(h)Y = WY + \tilde{X}\hat{\beta}_n \qquad \text{(dikalikan dengan } Y^{-1})$$
$$A(h) = W + \tilde{X}\hat{\beta}_n Y^{-1}$$
$$A(h) = W + \tilde{X}(\tilde{X}^T\tilde{X})^{-1}\tilde{X}^T\tilde{Y}Y^{-1}$$
$$A(h) = W + \tilde{X}(\tilde{X}^T\tilde{X})^{-1}\tilde{X}^T(1-W)YY^{-1}$$
$$A(h) = W + \tilde{X}(\tilde{X}^T\tilde{X})^{-1}\tilde{X}^T(1-W)$$

Jadi $A(h) = W + P_{\tilde{X}}(I-W)$, $P_{\tilde{X}} = \tilde{X}(\tilde{X}^T\tilde{X})^{-1}\tilde{X}^T$

Dengan nilai GCV yang minimal akan didapatkan nilai *bandwidth* yang optimal

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

BAB III

MODEL LINEAR PARSIAL

DENGAN KESALAHAN PENGUKURAN

3.1. Estimasi Parameter b dan Fungsi g(.)

Diketahui suatu model linear parsial dari n sampel : $Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$

Dimana kovariat X_i diukur dengan kesalahan. Sebagai pengganti pengamatan X_i, diamati :

$$\mathbf{W_i = X_i + U_i} \tag{3.1}$$

Dimana ukuran error U_i i.i.d, independen dengan (Y_i, X_i, T_i) dengan mean 0 dan matriks kovariansinya Σ_{UU}. Diasumsikan Σ_{UU} diketahui.

Dari persamaan (2.10) dan (3.1) didapatkan :

$$\begin{aligned} Y_i &= X_i^T\beta + g(T_i) + \varepsilon_i \\ &= W_i^T\beta + g(T_i) + \varepsilon_i - U_i^T\beta \\ &= W_i^T\beta + g(T_i) + \varepsilon_i^* \end{aligned} \tag{3.2}$$

Untuk β diketahui sebagai parameter yang benar maka dapat dicari estimasi fungsi g(.) , dari persamaan (3.2) :

$$Y_i - W_i^T\beta = g(T_i) + \varepsilon_i^* \tag{3.3}$$

Model (3.3) dapat dipandang sebagai model regresi nonparametrik dengan respon $Y_i - W_i^T\beta$, dari sub bab 2.2 diperoleh :

$$\hat{g}(t) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T)(Y_j - W_j^T\beta) \tag{3.4}$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Dalam kasus ini diasumsikan bahwa ε_i mempunyai mean 0 dan variansi tetap σ^2.

Berarti $E\{Y_i - X_i^T\beta - g(T_i)\}^2 = \sigma^2$, sehingga :

$$\begin{aligned} E\{Y_i - W_i^T\beta - g(T_i)\}^2 &= E\{Y_i - X_i^T\beta - U_i^T\beta - g(T_i)\}^2 \\ &= E\{Y_i - X_i^T\beta - g(T_i)\}^2 + E(U_i^T\beta)^2 \\ &= E\{Y_i - X_i^T\beta - g(T_i)\}^2 + \beta^T\Sigma_{UU}\beta \\ &= \sigma^2 + \beta^T\Sigma_{UU}\beta \end{aligned}$$

Persamaan (3.3) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$Y_i - W_i^T\beta = g(T_i) + \varepsilon_i \; *$$

$$Y_i - W_i^T\beta = \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i)(Y_j - W_j^T\beta) + \varepsilon_i^*$$

$$Y_i - W_i^T\beta = \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i)Y_j - \omega_{hj}(T_i)W_j^T\beta) + \varepsilon_i^*$$

$$Y_i - \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i)Y_j = [W_i - \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i)W_j]^T\beta + \varepsilon_i^*$$

$$\tilde{Y}_i = \tilde{W}_i^T\beta + \varepsilon_i^*$$

Dengan MSE = $\hat{\sigma}^{*2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{Y}_i - \tilde{W}_i^T\hat{\beta}\right)^2}{n}$

Karena $\sigma^2 = \sigma^{*2} - \beta^T\Sigma_{UU}\beta$ maka $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^{*2} - \hat{\beta}^T\Sigma_{UU}\hat{\beta}$

Sehingga : $\hat{\sigma}_n^2 = n^{-1}\sum_{i}^{n}\left(\tilde{Y}_i - \tilde{W}_i^T\hat{\beta}_n\right)^2 - \hat{\beta}_n^T\Sigma_{UU}\hat{\beta}_n$ (3.5)

Dari estimasi σ^2 pada persamaan (3.5), akan digunakan untuk menentukan estimasi β sebagai berikut :

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

$$\hat{\sigma}^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{Y}_i - \tilde{W}_i^T\hat{\beta}_n\right)^2 - \hat{\beta}_n^T\Sigma_{UU}\hat{\beta}_n$$

$$\hat{\sigma}^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{Y}_i\tilde{Y}_i - 2\tilde{Y}_i\tilde{W}_i^T\hat{\beta}_n + \left(\tilde{W}^T\hat{\beta}_n\right)^2\right) - \hat{\beta}_n^T\Sigma_{UU}\hat{\beta}_n$$

$$\hat{\sigma}^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{Y}_i\tilde{Y}_i - 2\tilde{Y}_i\tilde{W}_i^T\hat{\beta}_n + \tilde{W}^T\hat{\beta}_n\hat{\beta}_n{}^T\tilde{W}\right) - \hat{\beta}_n^T\Sigma_{UU}\hat{\beta}_n$$

$$\frac{\partial\hat{\sigma}^2}{\partial\hat{\beta}_n} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(0 - 2\tilde{Y}_i\tilde{W}_i^T + 2\tilde{W}^T\tilde{W}\hat{\beta}_n\right) - 2\Sigma_{UU}\hat{\beta}_n$$

$$0 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(0 - 2\tilde{Y}_i\tilde{W}_i^T + 2\tilde{W}_i^T\tilde{W}_i\hat{\beta}_n\right) - 2\Sigma_{UU}\hat{\beta}_n$$

$$0 = n^{-1}\left(-2\tilde{W}^T\tilde{Y} + 2\tilde{W}^T\tilde{W}\hat{\beta}_n\right) - 2\Sigma_{UU}\hat{\beta}_n$$

$$\tilde{W}^T\tilde{W}\hat{\beta}_n - n\Sigma_{UU}\hat{\beta}_n = \tilde{W}^T\tilde{Y}$$

$$\hat{\beta}_n = \left(\tilde{W}^T\tilde{W} - n\Sigma_{UU}\right)^{-1}\left(\tilde{W}^T\tilde{Y}\right)$$

Diperoleh :

$$\frac{\partial^2\hat{\sigma}^2}{\partial\hat{\beta}_n\hat{\beta}_n^T} = n^{-1}2\tilde{W}^T\tilde{W} - 2\Sigma_{UU} = 2B + 2\Sigma_{UU} - 2\Sigma_{UU} = 2B$$

Menurut Asumsi 1, B matriks definit positif, karena B merupakan matriks kovariansi dari X-E(X | T). maka $\hat{\beta}_n$ merupaka penaksir yang meminimalkan MSE

Jadi Estimasi dari β :

$$\hat{\beta}_n = \left(\tilde{W}^T\tilde{W} - n\Sigma_{UU}\right)^{-1}\tilde{W}^T\tilde{Y} \qquad (3.6)$$

Setelah mendapatkan $\hat{\beta}_n$, maka β pada persamaan (3.4) diganti dengan $\hat{\beta}_n$, untuk menghitung $\hat{g}_n(t)$.

$$\hat{g}(t) = \sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T)(Y_j - W_j^T\hat{\beta})$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

3.2. Sifat Normalitas Asimtotis Untuk Bagian Parametrik

Untuk membahas sifat asimtotis dibutuhkan beberapa pengertian, asumsi dan lemma berikut :

Ketidaksamaan Abel :

Barisan bilangan $a_1, a_2, a_3,\ldots,a_n, b_1, b_2, b_3,.., b_n$ ($b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots. \geq b_n \geq 0$) merupakan barisan bilangan real. Maka :

$$b_1\left(\min_{1\leq k\leq n}\sum_{i=1}^{k} a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq b_1\left(\max_{1\leq k\leq n}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)$$

Asumsi 4.

$E(\varepsilon_i) = E(U_i) = 0$ dan $\sup_i E(\varepsilon_i + ||U_i||^4) < \infty$

Lemma A1.

Apabila asumsi 1-4 dipenuhi, maka :

$$\max_{1\leq i\leq n}\left|G_j(T_i) - \sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_i)G_j(T_k)\right| = O_p(c_n),\ j=1,2,3,\ldots,p$$

$G_o(.) = g(.)$ dan $G_l(.) = h_l(.)$, $l=1,2,3,\ldots,p$

Dengan menggunakan asumsi 2 , 3 (iii) dan ketidaksamaan Abel, akan dibuktikan Lemma A1 untuk g(.).

UNIVERSITAS
GADJAH MADA

Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Bukti :

$$g(T_i)-\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_i)g(T_k)=g(T_i)\left\{1-\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_i)g(T_i)\right\}+\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_i)\{g(T_i)-g(T_k)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_i)\{g(T_i)-g(T_k)\}I(|T_i-T_k|>c_n)+$$

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_i)\{g(T_i)-g(T_k)\}I(|T_i-T_k|\le c_n)+$$

$$g(T_i)\left\{1-\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_i)g(T_i)\right\}$$

$$\max_{1\le i\le n}\left|g(T_i)-\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_i)g(T_k)\right|\le\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_i)\{g(T_i)-g(T_k)\}I(|T_i-T_k|>c_n)\right|+$$

$$\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_i)\{g(T_i)-g(T_k)\}I(|T_i-T_k|>c_n)\right|+$$

$$\max_{1\le i\le n}\left|g(T_i)\left\{1-\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_i)g(T_i)\right\}\right|$$

$$\le\ \max_{1\le i\le n}|g(T_i)-g(T_k|\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_i)I(|T_i-T_k|>c_n)\right|+$$

$$\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_i)\right|\max_{1\le i\le n}|g(T_i)-g(T_kI(|T_i-T_k|\le c_n)|+$$

$$\max_{1\le i\le n}|g(T_i)|\max_{1\le i\le n}\left|\left\{1-\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_i)g(T_i)\right\}\right|$$

$$=O(n^{-1/3}\log n)+O(n^{-1/3}\log n)=O(n^{-1/3}\log n)$$

Dengan demikian Lemma terbukti . ÿ

Lemma A2.

Apabila Asumsi 1-.4 dipenuhi, maka :

$$n^{-1}\tilde{X}^{T}\tilde{X}=B+o_p(1)$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Bukti :

Didefinisikan : $\bar{h}_{ns}(T_i) = h_s(T_i) - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(T_i) X_{ks}$, $X_{js} = h_s(T_j) + V_{js}$ elemen ke(s,m) dari $\tilde{X}^T \tilde{X}$ (s,m = 1,2,3,…,p) adalah :

$$\sum_{j=1}^{n} X_{js} X_{jm} = \sum_{j=1}^{n} V_{js} V_{jm} + \sum_{j=1}^{n} \bar{h}_{ns}(T_j) V_{jm} + \sum_{j=1}^{n} \bar{h}_{nm}(T_j) V_{js} + \sum_{j=1}^{n} \bar{h}_{ns}(Tj) \bar{h}_{nm}(T_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} V_{js} V_{jm} + \sum_{j=1}^{n} R_{nsm}^{(q)}$$

Dengan SLLN maka $\sum_{i=1}^{n} V_i V_i^T = B + o_p(1)$, dan Lemma A1, berarti $R_{nsm}^{(3)} = o_p(n)$, dengan Lemma A1 dan ketidaksamaan Cauchy-Schwarz : $R_{nsm}^{(1)} = o_p(n)$ dan $R_{nsm}^{(2)} = o_p(n)$.

Lemma A.3 (Ketidaksamaan Bernstein).

Misalkan $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ variabel random saling bebas dengan mean 0 dan range terbatas: $|\Gamma_i| \le M$. Untuk setiap $\eta > 0$,

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \Gamma i\right| > ?\right\} \le 2 \exp\left\{-h^2 / \left[2\left\{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(\Gamma i) + M?\right\}\right]\right\}$$

Dinotasikan : $e'_j = e_j I\left(|e_j| \le n^{1/4}\right)$ dan $e''_j = e_j - e'_j = e_j I\left(|e_j| > n^{1/4}\right)$, $j = 1, \ldots, n$..

Lemma A.4.

Apabila asumsi 1-4 dipenuhi, maka

$$\max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{k=1}^{n} ?_{nk}(T_i) e_k \right| = o_P\left\{n^{-2/5} \log(n)\right\}$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Bukti :

Ditetapkan L > 0 yang berdasarkan kenyataannya besar. Misalkan

$$B_{nL} = \left\{ \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} ?_{nj}(T_i) \le L, \max_{1\le i,\, j\le n} ?_{nj}(T_i) \le Lb_n \right\}$$

Kemudian

$$P\left\{ \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^{n} ?_{nj}(T_i) e_j \right| > n^{-2/5} \log(n) \right\} \le P\{I(B_{nL}) = 0\}$$

$$+ P\left\{ \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^{n} w_{nj}(T_i) e_j \right| > n^{-2/5} \log(n), I(B_{nL}) = 1 \right\} \qquad (3.7)$$

Karena berdasarkan asumsi 1.3 $P\{I(B_{nL}) = 1\}$ dapat dibuat menjadi kecil dengan memilih L yang cukup besar, hal itu mencukupi untuk menunjukkan bahwa syarat kedua dalam (3.7) konvergen ke nol untuk setiap L.

Aplikasi ketidaksamaan Bernstein ke (3.7) begitu rumit berdasarkan kenyataan bahwa syarat-syarat $\omega_{nj}(T_i)$ dan $I(B_{nL}) = 1$ adalah acak. Pertama kita kondisikan pada syarat-syarat ini dan akan tidak bersyarat kemudian. Untuk C yang cukup besar, pertama diberkan :

$$P\left\{ \max_{1\le i\le n} | \sum_{j=1}^{n} w_{nj}(T_i)\{e'_j - E(e'_j)\} | > Cn^{-2/5} \log(n) | \{w_{nj}(T_i)\}, I(B_{nL}) = 1 \right\}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} P\left\{ | \sum_{j=1}^{n} w_{nj}(T_i)\{e'_j - E(e'_j)\} | > Cn^{-2/5} \log(n) | \{w_{nj}(T_i)\}, I(B_{nL}) = 1 \right\}$$

Dengan menggunakan ketidaksamaan Bernstein dengan $h = Cn^{-2/5}\log(n)$ dan $M = 2Lb_n n1/4$. Kemudian pada sisi sebelah kanan dari bentuk yang terakhir dibatasi dengan

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

$$2I(B_{nL})\sum_{i=1}^{n}\exp\left\{-\frac{C^2 n^{-4/5}\log^2(n)}{4LCb_n n^{1/4-2/5}\log(n)+2\sum_{j=1}^{n}w_{nj}^2(T_i)\,\mathrm{var}(e'_j)}\right\} \qquad (3.8)$$

Dengan $b_n = n^{-4/5}$ dan $\mathrm{var}(e'_j) < \infty$. Pada persamaan bahwa $I(B_{nL}) = 1$, dengan demikian diperoleh :

$$\sum_{j=1}^{n} w_{nj}^2(T_i) \le \sum_{j=1}^{n} w_{nj}(T_i) \max_{1\le i,j\le n} w_{nj}(T_i) \le L^2 b_n$$

Hal menandakan bahwa (3.8) dibatasi dengan $2nI(B_{nL})\exp\{-(C/L)\log(n)\} \le n^{-3/2}$ untuk C yang cukup besar. Karena ekspresi terakhir independen terhadap $\{\omega_{nj}(T_i)\}$kecuali melewati $I(B_{nL})$, kita mempunyai

$$P\left\{\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{n} w_{nj}(T_i)\left\{e'_j - E(e'_j)\right\}\right| > Cn^{-2/5}\log(n) \mid I(B_{nL}) = 1\right\} \le n^{-3/2}$$

Ini menunjukkan bahwa

$$\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{n} w_{nj}(T_i)\{e'_j - E(e'_j)\}\right| = o_P\{n^{-2/5}\log(n)\} \qquad (3.9)$$

Untuk $V_n = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n} w_{nj}(T_i)\{e''_j - E(e''_j)\}$. Misalkan p dan q seperti berikut : $1 \le p < 2$, $1/p + 1/q = 1$ dan $1/q < 2/5 - 1/4$. Dengan ketidaksamaan Hölder,

$$|V_n| \le \max_{1\le n\le i}\left\{\sum_{j=1}^{n} w_{nj}^q(T_i)\right\}^{1/q}\left\{\sum_{j=1}^{n}|e''_j - E(e''_j)|^p\right\}^{1/p}$$

Dengan asumsi 3.(ii), $w_{nj}^q(T_i) = O_P(b_n^q)$ sehingga

$\Sigma_j w_{nj}^q(T_i) = Op(nb_n^q) = Op(n^{1-4q/5})$ dan dengan demikian

$$|V_n| \le Op\{n^{(1-4q/5)/q}\}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left|e''_j - E(e''_j)\right|^p\right\}^{1/p}$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Lebih jelasnya,

$$n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\left[\,|e_j'' - E(e_j'')|^p - E\left\{|e_j'' - E(e_j'')|^p\right\}\right] = o_p(1) \tag{3.10}$$

dengan ketidaksamaan Hölder,

$$E\left|e_j''\right|^p = E\left\{\left|e_j\right|^p I(e_j > n^{1/4})\right\} \le \left(E\left|e_j\right|^4\right)^{p/4}\{P(|e_j| > \mathrm{n}^{1/4})\}^{1-p/4}$$

dimana dengan ketidaksamaan Chebychev yang dibatasi oleh

$\le n^{-1+p/4}(E\,|e_j\,|^4)^{p/4}$. Oleh karena itu :

$$\sum_{j=1}^{n} E\,|e_j'' - E(e_j'')|^p = Op(n^{p/4}) \tag{3.11}$$

Dengan subtitusi (3.11) kedalam (3.10), diperoleh :

$$\sum_{j=1}^{n}|e_j'' - E(e_j'')|^p = Op(n^{p/4})$$

Berdasarkan kenyataan bahwa 1/q < 2/5 – 1/4, kita dapatkan bahwa

$$\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n} w_{nj}(T_i)\{e_j'' - E(e_j'')\} = Op(n^{(1-4q/5)/q+1/4}) = op(n^{-2/5}).$$

Lemma A.5. Apabila asumsi 1 – 4 dipenuhil, maka :

$$\sum_{i=1}^{n} U_i\tilde{g}_i = o_p(n^{1/2});$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i\tilde{g}_i = o_p(n^{1/2})$$

Perlakuan yang sama jika $g(T_i)$ digantikan dengan $h_j(T_i)$.

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Bukti :

Akan dibuktikan hanya langkah pertama, sedangkan langkah-langkah yang lainnya mengikuti dengan cara yang sama. Misalkan $?_n = n^{1/2} / \log(n)$

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} U_i \tilde{g}_i\right| > \xi n\right) \le P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} U_i \tilde{g}_i\right| > \xi n, \max_i |\tilde{g}_i| \le c_n \log n\right) + P\left(\max_i |\tilde{g}_i| > c_n \log n\right)$$

Dengan Lemma A1 bentuk kedua adalah $o_P(1)$. Untuk bentuk pertama, misalkan r_i adalah kejadian $|\tilde{g}_i| > c_n \log n$. Kemudian

$$P\left[\left|\sum_{i=1}^{n} U_i \tilde{g}_i\right| > \xi n, \{I(r_i) = 1 \nabla i\}\right] \le \xi_n^{-2} \sum_{i=1}^{n} E\left[U_i \tilde{g}_i \{I(r_i) = 1\}\right]^2 + \\ + \xi_n^{-2} \sum_{i \ne k}^{n} E\left[U_i U_k \tilde{g}_i \tilde{g}_k \{I(r_i) = 1 \nabla k\}\right] \qquad (3.12)$$

Karena $\tilde{g}_i \{I(r_i = 1\} \le c_n \log(n)$ independen terhadap U_i, bentuk pertama pada (3.12) adalah order $O\{n\xi_n^{-2} c_n^2 \log^2(n)\} = o(1)$ Syarat kedua dapat dengan mudah dilihat sama dengan nol. Dengan demikian Lemma terbukti.

Lemma A6

Apabila asumsi asumsi 1- 4 dipenuhi, maka :

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i) \varepsilon_j U_i = o_P(1)$$

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i) \varepsilon_j \varepsilon_i = o_P(1)$$

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i) U_j U_i = o_P(1)$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Bukti :

Jika r_{ij} merupakan kejadian dimana $\left|\omega_{nj}(T_i)\right| \le Cb_n \log n$.

$$P\left\{n^{-1/2}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)U_i\right| > \xi\right\} \le P\left\{n^{-1/2}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j U_i\right| > \xi, I(r_{ij}=1,\forall i,j\right\} +$$
$$+ P\left\{\max n^{-1/2}\left|\omega_{nj}(T_i)\right| > Cb_n \log n\right\}$$

Dengan menggunakan asumsi 3 (ii) bentuk kedua menuju ke 0.

Untuk bentuk I :

$$P\left\{n^{-1/2}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j U_i\right| > \xi, I(r_{ij}=1,\forall i,j\right\} \le \left\{n^{-1}\xi^{-2}E\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j U_i(r_{ij}=1,\forall i,j\right\}\right\}$$

$$= \left\{n^{-1}\xi^{-2}\sum_{i=1}^{n}E\left\{\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j(r_{ij}=1,\forall i,\right\}EU_i^2\right\}.$$

Persamaan terakhir dipenuhi karena U_i dan $E\left\{\sum_{i=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j(r_{ij}=1,\forall i,\right\}$ independen

untuk setiap i, dan U_i iid dengan mean 0.

Hal ini cukup dibuktikan :

$$\max_i E\left\{\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j(r_{ij}=1,\forall i,\right\}^2 \longrightarrow 0$$

Kenyataannnya :

$$E\left\{\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j(r_{ij}=1,\forall i,\right\}^2 = E\left\{\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j(r_{ij}=1,\forall i,\right\} +$$
$$+ E\left\{\sum_{j\ne k}\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j\omega_{nk}(T_i)\varepsilon_k(r_{ij}=1,\forall i,\right\}$$

Bentuk kedua bernilai 0. Bentuk pertama sama dengan :

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

$$\sum_{j=1}^{n} E\{\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j(r_{ij} = 1, \forall i,\}^2$$

dan persamaan ini mempunyai order $O\{nb_n^2 \log^2(n)\} = o(1)$.

Lemma A7

Apabila asumsi 1- 3 dipenuhi dan $E(\varepsilon_i + ||U_i||^4) < \infty$, maka

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\tilde{W}^T\tilde{W} = B + \Sigma_{uu} \tag{3.13}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\tilde{W}^T\tilde{Y} = B\beta \tag{3.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\tilde{Y}^T\tilde{Y} = \beta^T B\beta + \sigma^2 \tag{3.15}$$

Bukti:

Karena $W_i = X_i + U_i$ dan $\tilde{W}_i = \tilde{X}_i + \tilde{U}_i$, didapat

$$\left(\tilde{W}^T\tilde{W}\right)_{sm} = \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)_{sm} + \left(\tilde{U}^T\tilde{X}\right)_{sm} + \left(\tilde{X}^T\tilde{U}\right)_{sm} + \left(\tilde{U}^T\tilde{U}\right)_{sm} \tag{3.16}$$

Dengan SLLN dan Lemma A.2 diperoleh :

$$n^{-1}\sum_{j=1}^{n} X_{js}U_{jm} \to 0 \quad \text{a.s.} \tag{3.17}$$

Dimana :

$$n^{-1}\sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_{js}\tilde{U}_{jm} = n^{-1}\left[\sum_{j=1}^{n} X_{js}U_{jm} - \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_j)X_{ks}\right\}U_{jm}\right.$$

$$- \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_j)U_{km}\right\}X_{js}$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_j)X_{ks}\right\}\left\{\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_j)U_{km}\right\}\right]$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

dapat kita buktikan bahwa $\sup_{j\le n}\left|\Sigma_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_j)U_{km}\right| = O_P(1)$, Dari persamaan (3.17) dan asumsi 3(ii) dapat ditarik kesimpulan bahwa tiap bentuk diatas menuju ke nol. Dengan alasan yang sama, $n^{-1}\left(\tilde{U}^T\tilde{X}\right)_{sm}$ juga konvergen ke nol

Akan dibuktikan

$$n^{-1}\left(\tilde{U}^T\tilde{U}\right)_{sm} \to \sigma_{sm}^2 \tag{3.18}$$

dimana σ_{sm}^2 adalah elemen ke(s,m) dari Σ_{uu}.

$$n^{-1}\left(\tilde{U}^T\tilde{U}\right)_{sm} = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n}U_{js}U_{jm} - \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_j)U_{ks}\right\}U_{jm}\right.$$
$$- \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_j)U_{km}\right\}U_{js}$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_j)U_{ks}\right\}\left\{\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_j)U_{km}\right\}\right]$$

diketahui $n^{-1}\Sigma_{j=1}^{n}U_{js}U_{jm} \to \sigma_{sm}^2$. Mengikuti Lemma A3 dan A6 dan persamaan (3.18). Dengan menggunakan persamaan (3.16) dan (3.18) dengan argumentasi untuk $1/n\left(\tilde{U}^T\tilde{X}\right)_{sm} \to 0$ dan $1/n\left(\tilde{X}^T\tilde{U}\right)_{sm} \to 0$, kita selesaikan buk ti dari persamaan (3.13)

Kemudian kita buktikan persamaan (3.14) : $\tilde{W}^T\tilde{Y} = \tilde{W}^T(\tilde{X}\beta + \tilde{G} + \tilde{\varepsilon})$, dengan menggunakan lemma 1. $\sum_{j=1}^{n}\tilde{g}_j^2 = O_P(C_n^2 n)$, karena :

$$\left|\sum_{j=1}^{n}X_{js}\tilde{g}_j\right| \le \left(\sum_{j=1}^{n}X_{js}^2\sum_{j=1}^{n}\tilde{g}_j^2\right)^{1/2} \le c_n n^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}X_{js}^2\right) \le Cnc_n,$$

$$\frac{1}{n}\left(\tilde{W}^T\tilde{\varepsilon}\right)_s \to 0 \text{ dan } \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{U}_{js}\tilde{g}_j \to 0 \text{ dengan } n \to \infty,$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

sehingga

$$\frac{1}{n}\left(\tilde{W}^{T}\tilde{G}\right)_{s} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{X}_{js}\tilde{g}_{j} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{U}_{js}\tilde{g}_{j}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{X_{js} - \sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(T_{j})X_{ks}\right\}\tilde{g}_{j} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{U}_{js}\tilde{g}_{j} \to 0$$

dengan $n \to \infty$.

Lemma A8.

Diasumsikan bahwa asumsi 1- 4 dipenuhi, maka :

$$n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\varepsilon}_{i}\tilde{X}_{i} = n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{i}V_{i} + o_{P}(1)$$

$$n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_{i}\tilde{U}_{i}^{T} = n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}V_{i}U_{i}^{T} + o_{P}(1)$$

Bukti :

Akan dibuktikan bentuk pertama, bentuk kedua dapat dibuktikan dengan cara yang sama.

Jika $h(T) = E(X|T)$ dan $h_{i}(T) = h(T_{i})$.

$$n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\varepsilon}_{i}\tilde{X}_{i} = n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\left(\varepsilon_{i} - \sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_{i})\varepsilon_{j}\right)\tilde{X}_{i}$$

$$= n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{i}\tilde{X}_{i} - n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_{i}\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_{i})\varepsilon_{j}$$

$$= n^{-1/2}(I - II)$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Sehingga didapatkan :

$$
\begin{aligned}
I = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \tilde{X}_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i) X_j \right) \varepsilon_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(V_i + h(T_i) - \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i)(V_j + h(T_j)) \right) \varepsilon_i \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i V_i + \sum_{i=1}^{n} \left[h(T_i) - \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i) h(T_j) \right] \varepsilon_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i)(V_j) \varepsilon_i \right) \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i V_i + \max_i \left| h_i(T) - \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i) h(T_j) \right| \max_i \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i + \max_{1 \le i,j \le n} \omega_{nj}(T_i) \max_i \sum_{j=1}^{n} V_j \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i V_i + O(n^{-1/3} \log n) o_P(n) + O(n^{-2/3} \log n) O(n^{1/2} \log n) o_P(n) \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i V_i + o_P(n^{2/3} \log n) + o_P(n^{5/6} \log n) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i V_i + a_{n1} + a_{n2}
\end{aligned}
$$

Akan dijabarkan a_{n1} sebagai berikut :

$a_{n1} = op(n^{2/3} \log n)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n1}}{n^{2/3} \log n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} a_{n1} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{2/3} \log n} = 0$$

Karena $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{2/3} \log n} \neq 0$ maka $\lim_{n \to \infty} a_{n1} = 0$

Sehingga $a_{n1} = op(1)$

Dengan cara yang sama diperoleh $a_{n2} = o_p(1)$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA

Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

$$
\begin{aligned}
II = \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j &= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(T_i)X_k \right)\sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(V_i + h(T_i) - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(T_i)\left(V_k + h(T_k)\right) \right)\sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(h(T_i) - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(T_i)h(T_k) + V_i - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(T_i)V_k \right)\sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(h(T_i) - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(T_i)h(T_k) \right)\sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j + \sum_{i=1}^{n}\left(V_i\right)\sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j + \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(T_i)V_k \right)\sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j \\
&\le \left(\max_i \left| h(T_i) - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(T_i)h(T_k) \right| \max_i \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j \right) + \\
&\quad + \left(\max_i \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j \sum_{i=1}^{n}\left(V_i\right) \right) + \\
&\quad + \left(\max_i \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(T_i) \max_i \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j \sum_{k=1}^{n} V_k \right) \\
&= \left(O_p(n^{-1/3}\log n)o_p(n^{-2/5}\log n)\right) + \left(o_p(n^{-2/5}\log n)o_p(n)\right) + \\
&\quad + \left(O_p(n^{-1/3}\log n)o_p(n^{-2/5}\log n)o_p(n)\right) \\
&= \left(o_p(n^{-11/15}\log n) + o_p(n^{3/5}\log n) + o_p(n^{4/15}\log^2 n)\right) \\
&= b_{n1} + b_{n2} + b_{n3}
\end{aligned}
$$

Akan dijabarkan b_{n1} sebagai berikut :

$b_{n1} = op(n^{-11/15}\log n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n1}}{n^{-11/15}\log n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{n1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-11/15}\log n} = 0$$

Karena $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-11/15}\log n} \neq 0$ maka $\lim_{n\to\infty} b_{n1} = 0$

Sehingga $b_{n1} = op(1)$

Dengan cara yang sama diperoleh $b_{n2} = o_p(1)$ dan $b_{n3} = o_p(1)$

Dari I dan II, maka Lemma terbukti. ÿ

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Theorema 3.2.1.

Apabila asumsi 1- 4 dipenuhi, maka :

$$n^{1/2}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right) \xrightarrow{d} N\left(0, B^{-1}\Gamma B^{-1}\right),$$

dengan $\Gamma = E\left[\left(\varepsilon - U^T\beta\right)\left\{X - E\left(X|T\right)\right\}\right]^{\otimes 2} + E\left\{\left(UU^T - \Sigma_{UU}\right)\beta\right\}^{\otimes 2} + E\left(UU^T\varepsilon^2\right).$,

dimana $A^{\otimes 2}=AA^T$

jika ε adalah homoskesdastis dan independan terhadap (X,T).

Bukti

Didefinisikan $\Delta_n = \left(\tilde{W}^T\tilde{W} - n\Sigma_{uu}\right)/n$. Maka :

$$n^{1/2}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right) = n^{1/2}\left(\left(\tilde{W}^T\tilde{W} - n\Sigma_{uu}\right)^{-1}\tilde{W}^T\tilde{Y} - \beta\right)\Delta_n^{-1}\Delta_n$$

$$= n^{-1/2}\Delta_n^{-1}\left(\tilde{W}^T\tilde{Y} - \tilde{W}^T\tilde{W}\beta + n\Sigma_{uu}\beta\right)$$

$$= n^{-1/2}\Delta_n^{-1}\left(\left(\tilde{X}^T + \tilde{U}^T\right)\left(\tilde{X}\beta + \tilde{G} + \tilde{\varepsilon}\right) - \left(\tilde{X}^T + \tilde{U}^T\right)\left(\tilde{X} + \tilde{U}\right)\beta + n\Sigma_{uu}\beta\right)$$

$$= n^{-1/2}\Delta_n^{-1}\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\beta + \tilde{X}^T\tilde{G} + \tilde{X}^T\tilde{\varepsilon} + \tilde{U}^T\tilde{X}\beta + \tilde{U}^T\tilde{G} + \tilde{U}^T\tilde{\varepsilon}\right) -$$

$$- \tilde{X}^T\tilde{X}\beta - \tilde{X}^T\tilde{U}\beta - \tilde{U}^T\tilde{X}\beta - \tilde{U}^T\tilde{U}\beta + n\Sigma_{uu}\beta$$

$$= n^{-1/2}\Delta_n^{-1}\left(\tilde{X}^T\tilde{G} + \tilde{X}^T\tilde{\varepsilon} + \tilde{U}^T\tilde{G} + \tilde{U}^T\tilde{\varepsilon} - \tilde{X}^T\tilde{U}\beta - \tilde{U}^T\tilde{U}\beta + n\Sigma_{uu}\beta\right)$$

Dengan Lemma A.1,A.2, A.4,A.5,A.6 dan A.8 :

$$n^{1/2}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right) = n^{-1/2}\Delta_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{X}_i^T\tilde{g}_i + \tilde{X}_i\tilde{\varepsilon}_i + \tilde{U}_i^T\tilde{g}_i + \tilde{U}_i\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{X}_i^T\tilde{U}_i\beta - \tilde{U}_i\tilde{U}_i^T\beta + \Sigma_{uu}\beta\right)$$

$$= n^{-1/2}\Delta_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{W}_i^T\tilde{g}_i - \tilde{U}_i^T\tilde{g}_i + \tilde{X}_i\tilde{\varepsilon}_i + \tilde{U}_i^T\tilde{g}_i + \tilde{U}_i\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{X}_i^T\tilde{U}_i\beta - \tilde{U}_i\tilde{U}_i^T\beta + \Sigma_{uu}\beta\right)$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

$$n^{1/2}\left(\hat{\beta}_n-\beta\right)=n^{-1/2}\Delta_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{W}_i^T\tilde{g}_i+\tilde{X}_i\tilde{\varepsilon}_i+\tilde{U}_i\tilde{\varepsilon}_i-\tilde{X}_i^T\tilde{U}_i\beta-\tilde{U}_i\tilde{U}_i^T\beta+\Sigma_{uu}\beta\right)$$

$$=\Delta_n^{-1}\left(n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}V_i\varepsilon_i+o_P(1)+n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}U_i\varepsilon_i-n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}V_iU_i^T\beta+\right)$$

$$+\Delta_n^{-1}\left(o_P(1)\beta-\sum_{i=1}^{n}U_iU_i^T\beta+n^{1/2}\Sigma_{uu}\beta\right)$$

$$n^{1/2}\left(\hat{\beta}-\beta\right)=n^{-1/2}\Delta_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(V_i\varepsilon_i+U_i\varepsilon_i-V_iU_i^T\beta-U_iU_i^T\beta+\Sigma_{uu}\beta\right)+o_P(1)$$

$$\overset{def}{=}n^{-1/2}\Delta_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{in}+o_P(1)$$

karena $\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{i=1}^{n}V_i=0$, $\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{i=1}^{n}V_iV_i^T=B$, dan $\sup_i E\left(\varepsilon^4+\|U\|^4\right)<\infty$,

dipenuhi elemen-elemen barisan ke-k $\{\zeta_{in}^{(k)}\}$ dari $\{\zeta_{in}\}(k=1,...,p)$, untuk sebarang

$\zeta>0$, maka $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left\{\zeta_{in}^{(k)^2}I\left(\left|\zeta_{in}^{(k)}\right|>\zeta n^{1/2}\right)\right\}\to 0$ dengan $n\to\infty$

Berarti kondisi Lindeberg Feller CLT dipenuhi.

Sehingga

$$\mathrm{Cov}(\zeta_{ni})=E\left\{V_i\left(\varepsilon_i-U_i^T\beta\right)^2V_i^T\right\}+E\left\{\left(U_iU_i^T-\Sigma_{uu}\right)\beta\right\}^{\otimes 2}+E\left(U_iU_i^T\varepsilon_i^2\right)$$

$$+V_iE\left(U_i^T\beta\beta^TU_iU_i^T\right)+E\left(U_iU_i^T\beta\beta^TU_i\right)V_i,$$

Maka :

$$\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(\zeta_{ni})\left(\Delta_n^{-1}\right)=B^{-1}\left\{E\left(\varepsilon-U^T\beta\right)^2B+E\left\{\left(U\cdot U^T-\Sigma_{uu}\right)\beta\right\}^{\otimes 2}+E\left(UU^T\varepsilon^2\right)\right\}B^{-1}$$

$$=B^{-1}\Gamma B^{-1}$$

dengan demikian Teorema terbukti.

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

3.3. Sifat Asimtotis Untuk Bagian Nonparametrik.

Theorema 3.3.1

Apabila 1-.3 dipenuhi dan $\omega_{ni}(t)$ kontintinu Lipschitz order 1 untuk semua i, i = 1,2,…,n. Jika $E(\varepsilon^4 + \|\mathbf{U}\|^4) < \infty$ maka untuk titik desain tetap T_i , bias asimptotik dan variansi asimtotik dari $\hat{g}_n(t)$ adalah :

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(t) g(T_i) - g(t) \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}^2(t)\left(\beta^T \Sigma_{UU} \beta + \sigma^2\right)$$

Bukti :

Karena $\hat{\beta}_n$ penaksir yang konsisten dari β, bias asimptotik dan variansi asimtotik dari $\sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(t)(Y_j - W_j^T\beta)$, yang dinotasikan dengan $\hat{g}_n^*(t)$ adalah :

I. $$E\hat{g}_n^*(t) - g(t) = E\left\{\sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(t)(Y_i - W_i^T\beta) - g(t)\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(t)(g(T_i) + \varepsilon_i) - g(t)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(t) g(T_i) - g(t)$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

II. $$E\left\{\hat{g}_n^*(t) - E\hat{g}_n^*(t)\right\}^2 = E\left\{\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)(Y_i - W_i^T\beta) - \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)(g(T_i)\right\}^2$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t)(Y_i - W_i^T\beta - g(T_i))\right\}^2$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^n \omega_{ni}^2(t)(Y_i - W_i^T\beta - g(T_i)^2\right\} +$$

$$+ E\left\{\sum_{\substack{i \neq j \\ i<j}}^n \sum_j^n \omega_{ni}(t)(Y_i - W_i^T\beta - g(T_i)\omega_{nj}(t)(Y_j - W_j^T\beta - g(T_j)\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^n \omega_{ni}^2(t)(Y_i - W_i^T\beta - g(T_i)^2\right\} + E\left\{\sum_{\substack{i \neq j \\ i<j}}^n \sum_j^n \omega_{ni}(t)\varepsilon_i\omega_{nj}(t)\varepsilon_j\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^n \omega_{ni}^2(t)(\beta^T\Sigma_{UU}\beta + \sigma^2)$$

Dengan demikian teorema terbukti. ÿ

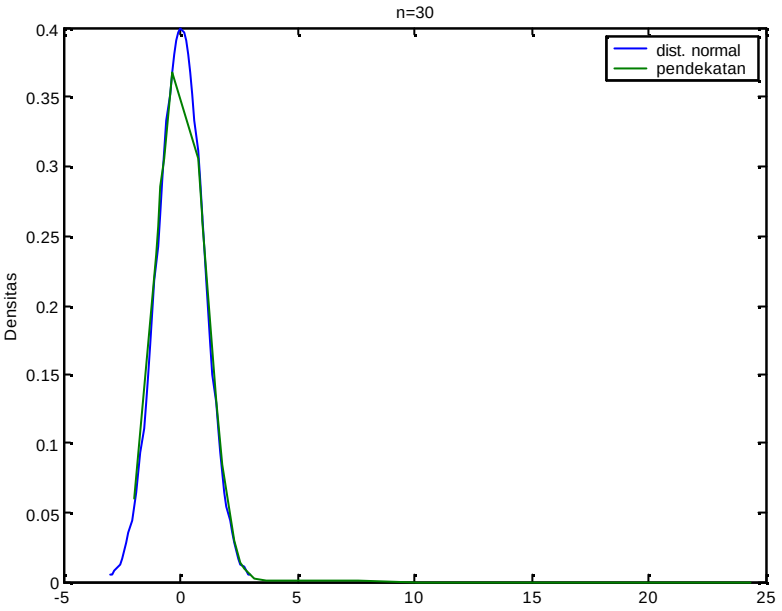
3.4. Simulasi

Dari model linear parsial dengan kesalahan pengukuran, $Y_i = W_i^T\beta + g(T_i) + \varepsilon_i^*$, akan dilakukan simulasi dengan $g(t)=t^3$, $\beta=5$, $U \sim N(0,1)$, $\varepsilon \sim N(0,1)$, $T \sim U(0,1)$ dan $n = 200$. Estimasi nonparametrik digunakan estimator Nadaraya Watson dengan kernel Gaussian dan kriteria pemilihan parameter penghalus h dengan GCV.

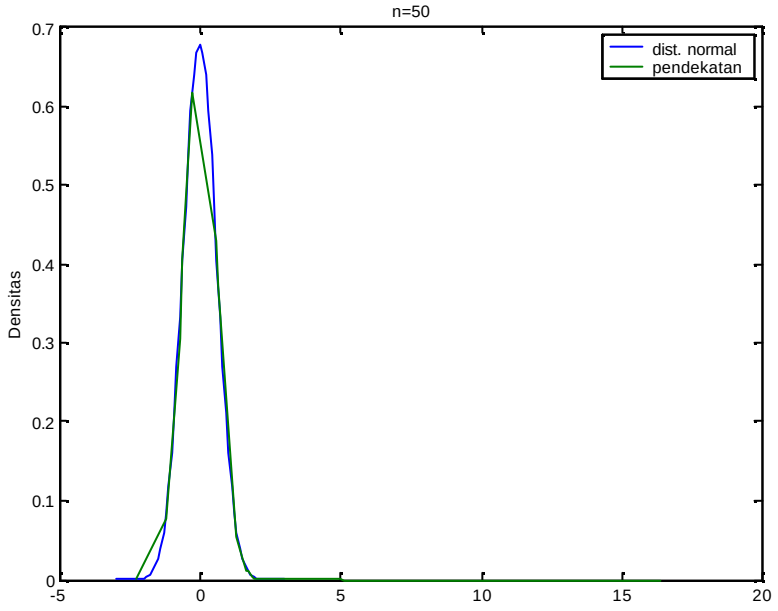
Dari Lampiran 2, plot Y dengan W dan Y dengan T, nampak hubungan Y dan W cenderung linear, Y dan T tidak terlihat pola yang jelas. Sehingga untuk mengestimasi parameter dan fungsi yang tidak diketahui digunakan model linear parsial dengan kesalahan pengukuran.

UNIVERSITAS
GADJAH MADA

Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/



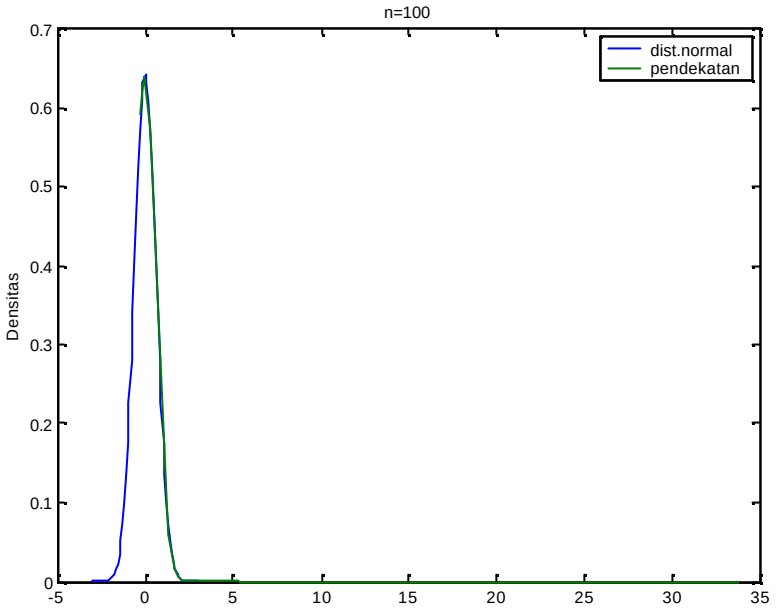
Gambar 3.1. Plot $n^{1/2}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right)$ dengan n=30



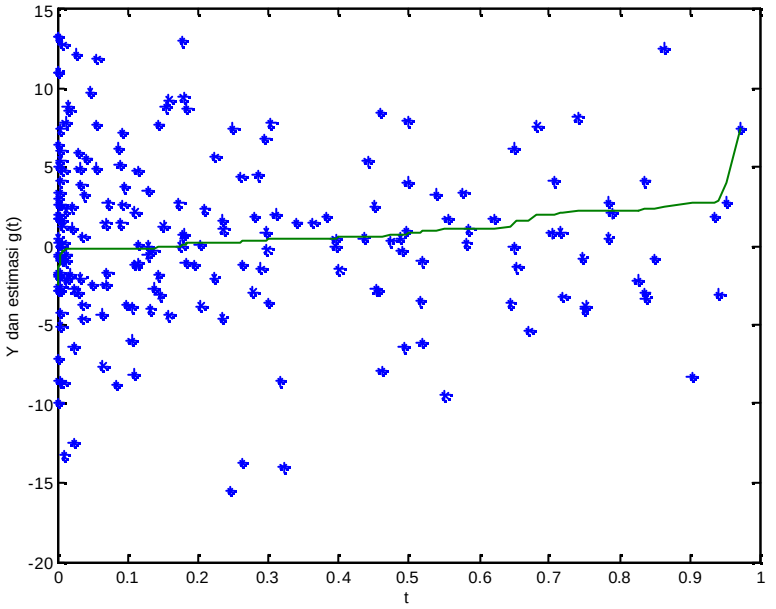
Gambar 3.2. Plot $n^{1/2}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right)$ dengan n=50

UNIVERSITAS
GADJAH MADA

Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

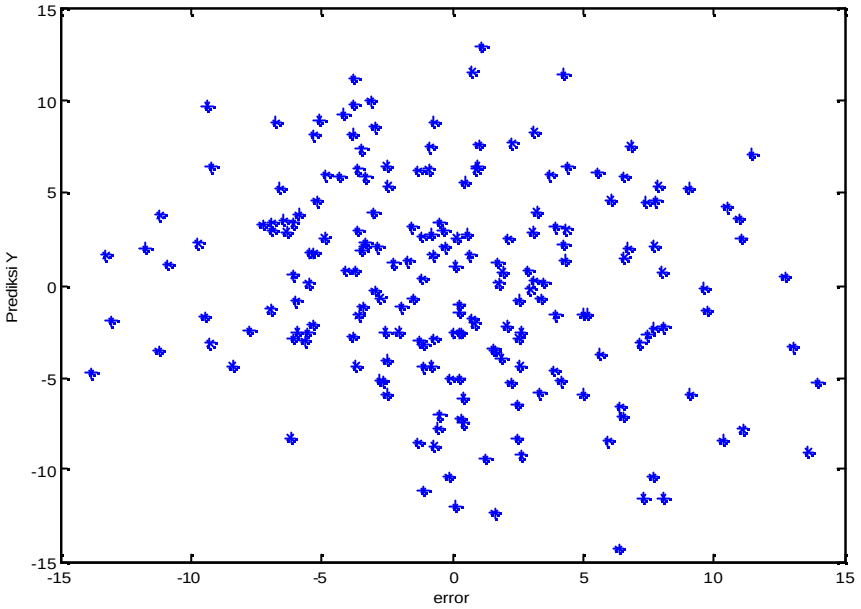


Gambar 3.3. Plot $n^{1/2}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right)$ dengan n=100

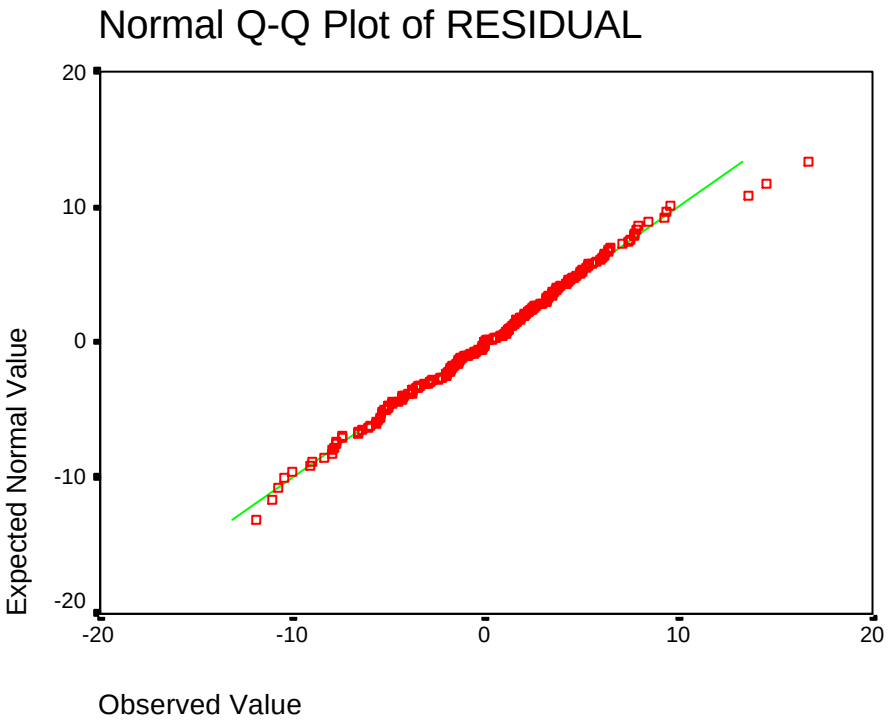


Gambar 3. 4. Plot antara t dengan Y dan estimasi g(t) dengan h=0.024

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/



Gambar 3. 5. Plot antara Residual dan Prediksi



Gambar 3. 6. QQ plot residual

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Dari hasil simulasi dengan h=0.024 diperoleh, $\hat{\beta}$=5.164, $\hat{\sigma}_{UU}$ = 2.318

Dari Gambar 3.1, 3.2 dan 3.3, distribusi $n^{1/2}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right)$ untuk n berturut-turut 30,50 dan 100, memberikan pendekatan yuang cukup bagus terhadap distribusi normal. Dari plot residual dengan prediksi pada gambar 5, nampak residual teralokasi secara random, yang mengindikasikan model sesuai dengan data.

Dari qq plot pada gambar 6, residual dapat dibentuk garis lurus, yang mengindikasikan residual mengikuti distribusi normal

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Kesimpulan

Pada Model Linear Parsial dengan Kesalahan Pengukuran,

$Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$, komponen nonparametrik g(.) diestimasi dengan estimator

Nadaraya Watson : $\hat{g}(t) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{hj}(T)(Y_j - W_j^T\beta)$, sedangkan untuk bagian

parametrik : $\hat{b}_n = \left(\tilde{\mathbf{W}}^T\tilde{\mathbf{W}} - nS_{UU}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{W}}^T\tilde{\mathbf{Y}}$

Sifat kenormalan asimtotis estimator $\hat{\beta}_n$ adalah:

$n^{1/2}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right) \xrightarrow{d} N\left(0, B^{-1}\Gamma B^{-1}\right)$,

dengan $\Gamma = E\left[\left(\varepsilon - U^T\beta\right)\left\{X - E\left(X|T\right)\right\}\right]^{\otimes 2} + E\left\{\left(UU^T - \Sigma_{UU}\right)\beta\right\}^{\otimes 2} + E\left(UU^T\varepsilon^2\right)$.,

dimana $A^{\otimes 2}=AA^T$

Bias asimptotik dan variansi asimtotik dari $\hat{g}_n(t)$ adalah :

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(t)g(T_i) - g(t) \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}^2(t)\left(\beta^T\Sigma_{UU}\beta + \sigma^2\right)$$

4.2. Saran

Untuk penelitian lebih lanjut, perlu diberikan kasus-kasus nyata yang diterapkan pada model linear parsial dengan kesalahan pengukuran, serta identifikasi variabel-variabel prediktornya.

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

RINGKASAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Jika terdapat n pengamatan saling bebas (X_i, Y_i), i=1,2,3,...,n, persamaan regresi dinyatakan sebagai berikut :

$$Y_i = g(X_i) + \varepsilon_i,\ i=1,2,3,...,n \qquad (1.1)$$

Dengan g fungsi regresi tidak diketahui, ε_i, i=1,2,3,...,n merupakan variabel kesalahan random.

Model regresi dengan menganggap bahwa bentuk fungsi g(.) diketahui disebut model regresi parametrik, sedangkan jika bentuk fungsi g(.) tidak diketahui disebut model regresi nonparametrik.

Pada pendekatan nonparametrik akan lebih fleksibel untuk mencari kurva estimator yang sesuai dengan data karena model tidak ditentukan lebih dahulu seperti pada model parametrik..

Jika sebagian variabel random independen mempunyai hubungan fungsional dengan variabel respon dalam bentuk spesifikasi tertentu, sedangkan variabel independen lainnya mempunyai hubungan fungsional dalam bentuk fungsional tidak tertentu, maka digunakan pendekatan dengan model linear parsial. Dengan model $Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$. X_i dan T_i merupakan vektor variabel penjelas, yang merupakan titik design tidak random (fixed). Fungsi g merupakan fungsi yang tidak diketahui dan $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_P)^T$ merupakan parameter tidak diketahui, ε_i,

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

$i=1,2,3,...,n$ merupakan kesalahan random dengan mean 0 dan variansi tetap (pola homoskesdastisitas).

Pada kasus model linear parsial dengan kesalahan pengukuran yaitu kovariat X_i diukur dengan kesalahan, sebagai pengganti pengamatan X_i , diamati :

$$W_i=X_i+U_i$$

Dimana kesalahan ukuran U_i i.i.d, independen dengan (Y_i, X_i, T_i) dengang mean 0 dan matriks kovariansinya Σ_{UU} diasumsikan diketahui.

1.2. Permasalahan

Permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan estimasi parameter dan sifat normalitas asimtotis $\hat{\beta}_n$ pada model liner parsial dengan kesalahan pengukuran

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini adalah menentukan estimasi parameter dan sifat normalitas asimtotis $\hat{\beta}_n$ pada model linear parsial dengan kesalahan pengukuran.

.

1.4. Tinjauan Pustaka

Dalam praktek, penerapan dari model linear parsial banyak sekali. Engle, Granger, Rice dan Weiss (1966), yang pertama kali menggunakan model ini. Mereka menganalisa hubungan antara temperatur dan penggunaan listrik.

Speckman (1988) menerapkan model linear parsial pada percobaan obat kumur.

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Sedangkan untuk model dengan kesalahan pengukuran telah diteliti oleh Fuller (1987), Carrol, Rupper and Stefanskim (1995). Andrew Chesher (1991) meneliti tentang efek dsri kesalahan pengukuran.

Green, Jennison dan Seheult (1985), Goa (1992) telah mempelajari sifat-sifat asimtotis dari estimator dengan kuadrat terkecil pada kasus design titik non random

Engle, Grangeerm Rice dan Weiss (1986), Heckman (1996), rice (1986) Whaba (1990), Green dan Silverman (1994) dan Eubank, Kambour, Kim, Klipple, reese dan Schimek (1998) menggunakan teknik penghalusan untuk penakasiran parameter.

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

BAB II

PENGERTIAN DASAR

2.1. Regresi Parametrik

Diberikan n pasangan pengamatan $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^{n}$. Pandang model regresi :

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i,\ i=1,2,...,n \qquad (2.1)$$

Dimana Y_i merupakan variabel respon, X_i variabel prediktor dan ε_i kesalahan random, dengan asumsi tidak berkorelasi dan mean 0.

Asumsi pada regresi parametrik adalah bentuk fungsi regresi m(.) diketahui, kecuali untuk sejumlah berhingga parameter yang tidak diketahui, yaitu ada vektor parameter $\beta = (\beta_1, \beta_2,...,\beta_p)^T$ dan ada fungsi $m(.;\beta)$ sehingga $m(.) = m(.;\beta)$. Fungsi regresi $m(.;\beta)$, dapat berbentuk linear dalam parameter ataupun non linear. Fungsi disebut non linear jika minimal non linear dalam satu parameter. Dan disebut linear jika terdapat fungsi diketahui $f_1, f_2,...,f_p$ sedemikian hingga $m(x) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j f_j(x)$. Akan tetapi dalam tulisan ini dibatasi pada model yang linear saja. Sehingga jika terdapat $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^{n}$, pengamatan, maka model akan menjadi :

$$Y_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_j f_j(x_i) + \varepsilon_i;\ i=1,2,...,n \qquad (2.2)$$

Model diatas jika dituliskan dalam notasi matriks akan menjadi :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}b + e$$

Dimana $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, .., y_n)^T$, $b = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_P)^T$ dan $e = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)^T$, dengan asumsi $\varepsilon_i \sim \mathbf{(0,}\ s^2\mathbf{I_n)}$.

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Dengan model (2.2), untuk mengestimasi m ekuivalen dengan mengestimasi koefisien-koefisien regresi yaitu $b = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_P)^T$.

Ada beberapa metode panaksiran parameter regresi, salah satunya metode kuadrat terkecil. Metode ini meminimalkan $e^T e$ terhadap b. Diperoleh :

$$\hat{b} = (\mathbf{X^T X})^{-1}(\mathbf{X^T Y}) \qquad (2.3)$$

Dengan sifat estimator tersebut :

1. $\hat{b}$ merupakan penaksir yang tak bias untuk b
2. $\text{Var}(\hat{b}) = s^2(\mathbf{X^T X})^{-1}$
3. $\hat{b}$ merupakan penaksir terbaik, yang berarti diantara semua panaksir linear takbias untuk b, $\hat{b}$ mempunyai variansi minimal.

2.2. Regresi Non Parametrik

Untuk n pasangan pengamatan $\{(T_i, Y_i)\}_{i=1}^{n}$, diberikan model regresi nonparametrik sebagai berikut :

$$Y_i = g(T_i) + \varepsilon_i, \; i=1,2,3,...,n \qquad (2.4)$$

Dimana Y_i merupakan variabel respon, T_i variabel prediktor dan ε_i kesalahan random, dengan asumsi tidak berkorelasi dan mean 0.

Dalam regresi nonparametrik tidak ada asumsi tentang bentuk fungsi regresi g(.). Hal ini memberikan *flexibilitas* yang lebih besar didalam bentuk yang mungkin dari fungsi regresi. Untuk mengkonstruksi model regresi nonparametrik terlebih dahulu dipilih ruang fungsi yang sesuai, dimana fungsi regresi g(.)

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

diyakini termasuk didalamnya. Pemilihan ruang fungsi ini biasanya dimotivasi oleh sifat kelicinan yang diasumsikan dimiliki oleh fungsi regresi.

Ada beberapa teknik untuk mengestimasi fungsi regresi g(.), salah satunya adalah dengan estimator kernel. Sebagai contoh estimator kernel untuk fungsi regresi g(.) :

$$\hat{g}_n(t) = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_h(t - T_i)Y_i}{n^{-1}\sum_{j=1}^{n} K_h(t - T_j)}$$

dimana h : lebar pita (*bandwidth*); $K_h(t)=h^{-1}K(t/h)$, dan K disebut fungsi kernel

2.2.1 Fungsi Kernel

Diberikan suatu sampel random X_i, i=1,2,3,...,n iid. Karakteristik dasar yang menggambarkan kalakuan dari suatu variabel random adalah fungsi densitas f dari sampel random tersebut. Berdasarkan sampel random ini akan diestimasi fungsi densitas f yang tidak diketahui dengan pendekatan kernel. Kernel K didefinisikan (Hardle, 1990) :

$$K_h(t) = \frac{1}{h}K\left(\frac{t}{h}\right)$$

dengan h adalah *bandwidth.* Fungsi densitas f diestimasi dengan :

$$\hat{f}_h(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h(t - T_i) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{t - T_i}{h}\right) \qquad (2.5)$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Definisi 2.1.

Kernel K adalah fungsi bernilai real, kontinyu, terbatas, simetri dan integralnya sama dengan 1. $\int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt = 1$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} t\,K(t)dt = 0$

Beberapa fungsi kernel (Hardle1990) :

Kernel	K(u)
Uniform	$\frac{1}{2}I(\lvert u\rvert \le 1)$
Triangle	$(1-\lvert u\rvert)I(\lvert u\rvert \le 1)$
Epanechnikov	$\frac{3}{4}(1-u^2)I(\lvert u\rvert \le 1)$
Quartic	$\frac{15}{16}(1-u^2)^2 I(\lvert u\rvert \le 1)$
Triweight	$\frac{35}{32}(1-u^2)^3 I(\lvert u\rvert \le 1)$
Gaussian	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}u^2)$
Cosinus	$\frac{\pi}{4}\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{4}u)I(\lvert u\rvert \le 1)$

Dari definisi kernel diatas maka : $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_h(t)dt = 1$

Estimator kernel untuk fungsi densitas bersama variabel random T dan Y diperoleh dengan kernel multiplikatif :

$$\hat{f}_{h1h2}(t,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t-T_i)K_{h2}(y-Y_i) \qquad (2.6)$$

Lemma 2.1

Jika $\hat{f}_{h1h2}(t,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t-T_i)K_{h2}(y-Y_i)$ maka

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\hat{f}_{h1h2}(t,y)dy = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t-T_i)Y_i \qquad (2.7)$$

Selanjutnya estimator kernel untuk model regresi nonparametrik $Y_i = g(T_i) + \varepsilon_i$ Dikonstruksikan sebagai berikut :

Kurva regresi : $g(t) = E(Y|T=t) = \dfrac{\int yf(t,y)dy}{f(t)}$ (2.8)

dimana f(t,y) merupakan fungsi densitas bersama (T,Y) dan f(t) fungsi densitas marginal untuk T.

Estimator natural untuk g(t) adalah dengan mengganti pembilang dan penyebut pada persamaan (2.8), (2.5) dan (2.7) dengan mengambil *bandwidth* yang sama yaitu h, maka diperoleh :

$$\hat{g}(t) = \frac{\int y\hat{f}_{h1h2}(t,y)dy}{\hat{f}_h(t)} = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_h(t-T_i)Y_i}{n^{-1}\sum_{j=1}^{n} K_h(t-T_j)} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t)Y_i \qquad (2.9)$$

dengan $W_{ni}(t) = \dfrac{K_h(t-T_i)}{n^{-1}\sum_{j=1}^{n} K_h(t-T_j)}$

Persamaan (2.9) telah di temukan oleh Nadaraya (1964) dan Watson (1964). Oleh karena itu estimator ini sering disebut “Estimator Nadaraya Watson”.

Karena persamaan (2.9) tergantung pada nilai h, maka nilai-nilai ekstrim untuk h mengakibatkan :

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

- Anggap estimator kernel hanya dihitung pada pengamatan {Ti, i=1,2,..,n}.

  Maka jika h→0, $\hat{g}_n(T_i) \to \frac{K(0)Y_i}{K(0)} = Y_i$

  Jadi *bandwidth* (h) sangat kecil, estimator akan menuju ke data

- Jika h→∞ maka $K\left(\frac{t-T_i}{h}\right) \to K(0)$, akibatnya

$$\hat{g}_n(T_i) \to \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K(0)Y_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K(0)} = \frac{n^{-1}K(0)\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n^{-1}\left(nK(0)\right)} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \overline{Y}$$

Jadi *bandwidth* (h) sangat besar, estimator akan sangat mulus dan menuju rata-rata dari variabel respon.

Jika diambil $\omega_{ni}(t) = \frac{K_h(t-T_i)}{\sum_{j=1}^{n} K_h(t-T_j)}$ maka estimator g(t) ekuivalen dengan :

$$\hat{g}(t) = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_h(t-T_i)Y_i}{n^{-1}\sum_{j=1}^{n} K_h(t-T_j)} = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(t)Y_i$$

2.3. MODEL LINEAR PARSIAL

Model Linear Parsial merupakan gabungan dari regresi parametrik dan regresi nonparametrik. Model linear parsial mengasumsikan data $\{(X_i, T_i, Y_i) : i=1,2,...,n\}$ mempunyai bentuk :

$$Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i . \qquad (2.10)$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

X_i dan T_i merupakan vektor variabel penjelas, yang merupakan titik design tidak random (fixed). g merupakan fungsi yang tidak diketahui dan $\beta = (\beta_1,\beta_2,...,\beta_P)^T$ merupakan parameter tidak dikatahui, ε_i , i=1,2,3,...,n merupakan kesalahan random dengan mean 0 dan variansi tetap. $X_i^T\beta$ merupakan komponen parametrik, dimana estimasinya dilakukan dengan metode Least Square. $g(T_i)$ merupakan komponen nonparametrik, dimana estimasinya menggunakan estimator kernel.

2.3.1. Estimasi parameter

Jadi jika β adalah parameter sebenarnya, persamaan (2.10) dapat dinyatakan sebagai :

$$Y_i - X_i^T\beta = g(T_i) + \varepsilon_i \tag{2.11}$$

Jika $Y_i^* = Y_i - X_i^T\beta$, maka dengan menggunakan teori regresi diperoleh :

$$g(t) = E(Y^* \mid T = t) = t) = \frac{\int y^* g(t, y^*)dy^*}{g(t)} \tag{2.12}$$

Untuk fungsi densitas bersama g(t,Y*) diestimasi dengan pergandaan kernel

$$\hat{g}_{h1h2}(t, y^*) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t - T_i)K_{h2}(y^* - Y_i^*)$$

$$\int y^*\hat{g}_{h1h2}(t, y^*)dy^* = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t - T_i)\int \frac{y^*}{h_2}K\left(\frac{y^* - Y_i^*}{h_2}\right)dy^*$$

$$= n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t - T_i)\int (sh_2 + Y_i^*)K(s)ds$$

$$= n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_{h1}(t - T_i)Y_i^*$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Sehingga diperoleh :

$$\hat{g}_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_h(t - T_i) Y_i^*}{\sum_{j=1}^{n} K_h(t - T_j)} = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(t)(Y_i - X_i^T \beta) \qquad (2.13)$$

dimana :

$$\omega_{hi}(t) = \frac{K_h(t - T_i)}{\sum_{j=1}^{n} K_h(t - T_j)} = \frac{K\left(\frac{t - T_i}{h}\right)}{\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{t - T_j}{h}\right)}$$

Selanjutnya $\hat{g}_n(t)$ menggantikan g(t) pada persamaan (2.10), sehingga didapatkan model estimasi sebagai berikut :

$$Y_i = X_i^T \beta + \hat{g}(T_i) + \varepsilon_i \qquad (2.14)$$

Berdasarkan model diatas, dengan menggunakan metode kuadrat terkecil diperoleh taksiran β dengan meminimumkan $\varepsilon'\varepsilon$ sebagai berikut :

$$\hat{\beta}_n = \left(\tilde{X}^T \tilde{X}\right)^{-1} \tilde{X}^T \tilde{Y} \qquad (2.15)$$

dengan

$$\tilde{X}_i = \left[X_i - \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i) X_j \right], \quad \tilde{Y}_i = \left[Y_i - \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i) Y_j \right]$$

$$\tilde{Y}^T = (\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, ..., \tilde{Y}_n) \ , \quad \tilde{X}^T = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_n)$$

Setelah mendapatkan $\hat{\beta}_n$, maka β pada persamaan (2.13) diganti dengan $\hat{\beta}_n$, untuk menghitung $\hat{g}_n(t)$.

$$\hat{g}_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(t)(Y_i - X_i^T \hat{\beta})$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

2.3.2. Sifat Asimtotik Estimator

Untuk mendapatkan sifat-sifat asimtotik untuk β diperlukan beberapa pengertian, teorema dan asumsi berikut :

Definisi 2.2.

Fungsi g dikatakan kontinyu di x bila untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $\delta>0$ sedemikian hingga untuk setiap y dalam domain fungsi dengan $|x-y| < \delta$ berlaku $|g(x)-g(y)| < \varepsilon$

Definisi 2.3. (Rudin, W, 1976)

Fungsi g dikatakan kontinyu Lipschitz pada [a,b] bila terdapat konstanta $M > 0$ sedemikian hingga $|g(x)-g(y)| < M|x-y|$. untuk setiap x,y dalam [a,b]

Definisi 2.4. (Pfeffer, W.F, 1993)

Konvergen Dalam Probabilitas (Casella, Berger, 1990)

Barisan variabel random $X_1, X_2, X_3, \ldots$ konvergen dalam probabilitas ke suatu variabel random X jika untuk setiap $\varepsilon>0$, $\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0$ atau

$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| < \varepsilon\right) = 1$ atau biasa ditulis $X_n \xrightarrow{P} X$

Definisi 2.5.

Konvergen Hampir Pasti (Casella, Berger, 1990)

Barisan variabel random $X_1, X_2, X_3, \ldots$ konvergen hampir pasti ke suatu variabel random X jika untuk setiap $\varepsilon>0$, $P(\lim_{n\to\infty} |X_n - X| < \varepsilon) = 1$ atau biasa ditulis

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

$X_n \xrightarrow{a.s} X$

Definisi 2.6.

Konvergen Dalam Distribusi (Casella, Berger, 1990)

Barisan variabel random $X_1, X_2, X_3, \ldots$ konvergen dalam distribusi ke suatu variabel randon X jika $\lim_{n\to\infty} F_{Xn}(x) = F_X(x)$ pada setiap titik x dimana $F_X(x)$ kontinyu.

Atau biasa ditulis $X_n \xrightarrow{d} X$

Teorema 2.1.

Strong Law of Large Number (Casella, Berger, 1990)

Jika X_i, i=1,2,... variabel random i.i.d. dengan mean $\mu<\infty$, maka

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{a.s} \mu \quad \text{untuk } n \to \infty$$

Teorema 2.2.

Weak Law of Large Number (Casella, Berger, 1990)

Jika X_i, i=1,2,... variabel random i.i.d. dengan mean $\mu<\infty$, maka

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{p} \mu \quad \text{untuk } n \to \infty$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Definisi 2.7. (Serfling R.J, 1980)

Barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ dinyatakan sebagai $a_n = O(b_n)$ jika terdapat bilangan real M sedemikian sehingga $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = M$

Definisi 2.8. (Serfling R.J, 1980)

Barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ dinyatakan sebagai $a_n = o(b_n)$ jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

Dengan sifat dari "O" :

- jika $a_{n1} = O(b_{n1})$, $a_{n2} = O(b_{n2})$ maka $a_{n1} + a_{n2} = O(b_{n1} + b_{n2})$
- jika $\alpha > 0$ adalah konstanta, $a_n = O(\alpha\, b_n)$ maka $a_n = O(b_n)$
- jika $a_{n1} = O(b_{n1})$, $a_{n2} = O(b_{n2})$ maka $a_{n1} . a_{n2} = O(b_{n1} . b_{n2})$

Definisi 2.9. (Serfling R.J, 1980)

Barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ dinyatakan sebagai $a_n = O_p(b_n)$ jika terdapat bilangan real M dan N sedemikian sehingga $P\left\{\left|\frac{a_n}{b_n}\right| > M\right\} \le \varepsilon, \quad \nabla n > N$

Definisi 2.10. (Serfling R.J, 1980)

Barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ dinyatakan sebagai $a_n = o_p(b_n)$ jika untuk semua $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \ge \varepsilon\right\} = 0$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Teorema 2.3 Teorema Limit Pusat (Casella, Berger, 1990)

Misalkan X_i, i=1,2,... variabel random i.i.d. yang mempunyai mgf ($M_x(t)$ ada untuk $|t|<h$, untuk beberapa h positif). Misal $E(x_i) = \mu$ dan $var(x_i) = \sigma^2$. Didefinisikan $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $G_n(x)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif dari $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/\sigma$. Maka untuk sembarang x, $-\infty<x<\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy,$$ yaitu $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/\sigma$ berdistribusi normal standart.

Teorema 2.4. (Sen, P.K dan Singer,1993)

Jika $\{X_i\}$ merupakan vektor random i.i.d pada R^p dengan mean μ_i dan matriks kovarian Σ_i, maka :

$$n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \xrightarrow{d} N(0,\Sigma), \Sigma = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\Sigma_i$$

Teorema 2.5. (Sen, P.K dan Singer,1993)

Jika $Z\sim N(\mu,\Omega)$ dan A adalah suatu matriks, maka vektor $U=AZ\sim N(A\mu, A\Omega A^T)$

Jika komponen $X_i=(X_{ij})$. Didefinisikan : $h_j(T_i) = E(X_{ij} \mid T_i)$ dan $V_i = X_i - E(X_i \mid T_i)$

$1 \le i \le n$, $1 \le j \le p$

Asumsi 1.

$\sup_{0\le t\le 1} E\|X_1\|^4 T = t) < \infty$ dan $B=E(V_1V_1^T)$ adalah matriks definit positif

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Asumsi 2.

g (.) dan $h_j(.)$ kontinyu Lipschitz

Asumsi 3. Fungsi bobot $\omega_{ni}(.)$ memenuhi :

i). $\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i) = O_P(1)$

ii). $\max_{1\le i,j\le n} \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(T_j) = O_P(b_n)$

iii). $\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T_i) I(|T_j - T_i| > c_n) = O_P(c_n)$

dimana $b_n = n^{-2/3} \log n$ dan $c_n = n^{-1/3} \log n$..

Lemma 2.2.

Jika asumsi 1,2,3 dipenuhi maka $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X} = B$

2.3.1.1. Sifat kenormalan

Dari lemma 2.2 dengan B adalah matriks definit positif, maka $\tilde{X}^T \tilde{X} = O(n)$, artinya terdapat bilangan real M_1, sedemikian hingga :

$$\frac{1}{n}(\tilde{X}^T \tilde{X}) \le M_1 \qquad (2.16)$$

dengan $E(\tilde{X}^T \varepsilon) = 0$ dan $Var(\tilde{X}^T \varepsilon) = \sigma^2 \tilde{X}^T \tilde{X}$

Menurut pertidaksamaan Chebyshev, yaitu jika variabel random dengan mean μ dan variansi berhingga $\forall\delta$ berlaku :

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

$$P\left[\left|Z-\mu\right| \geq \delta\right] \leq E\left[\frac{(Z-\mu)^2}{(\delta)^2}\right] \tag{2.17}$$

dipilih $\delta = n^{1/2}M_2$ pada persamaan (2.17) dan menggunakan pertidaksamaan (2.16) terhadap variabel random $\tilde{X}^T\varepsilon$, maka untuk setiap $M_2>0$ berlaku :

$$P\left[\left|\tilde{X}^T\varepsilon - 0\right| \geq n^{1/2}M_2\right] \leq \left[\frac{\sigma^2\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^2}{nM_2^2}\right] \leq \sigma^2\frac{M_1}{M_2^2}$$

atau $P\left[\left|n^{-1/2}\tilde{X}^T\varepsilon\right| \geq M_2\right] \leq \sigma^2\frac{M_1}{M_2^2}$ (2.18)

jika untuk sebarang $\varepsilon_1>0$ dipilih M_2 sehingga $\sigma^2\frac{M_1}{M_2^2} \leq \varepsilon_1$ maka

$$M_2 \geq \sqrt{\frac{\sigma^2 M_1}{\varepsilon_1}} = \sigma\left(\frac{M_1}{M_2^2}\right)^{1/2}$$

Sehingga persamaan (2.18) dapat ditulis menjadi :

$$P\left[\left|n^{-1/2}\tilde{X}^T\varepsilon\right| \geq M_2\right] \leq \varepsilon_1 \tag{2.19}$$

berdasarkan definisi 2.9 dan 2.10 order dalam probabilitas maka pertidaksamaan (2.19) menjadi $\tilde{X}^T\varepsilon = O_p(n^{1/2})$ atau dinyatakan sebagai :

$$\tilde{X}^T\varepsilon = o_p(n) \tag{2.20}$$

Akan diselidiki distribusi asimtotis dari $n^{-1/2}\tilde{X}^T\varepsilon$ dengan menggunakan teorema 2.4. Untuk menerapkan teorema limit pusat terhadap $n^{-1/2}\tilde{X}^T\varepsilon$, dimisalkan $\tilde{X}_i$ vektor px1 yaitu baris ke-i dari matriks $\tilde{X}$ dan $Z_i = \tilde{X}_i\varepsilon_i$, maka :

$\text{Var}(Z_i) = V_i = \sigma^2\tilde{X}_i\tilde{X}_i^T$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

$$\Sigma = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 \tilde{X}_i \tilde{X}_i^T$$
$$= \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X} = \sigma^2 B$$

Jadi $$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i \varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{X}^T \varepsilon \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 B) \qquad (2.21)$$

Persamaan $Y_i = X_i^T \beta + \hat{g}(t_i) + \varepsilon_i$ dapat dipandang sebagai $\tilde{Y} = \tilde{X}\beta + \varepsilon$ sehingga dperoleh :

$$\hat{\beta}_n = \left(\tilde{X}^T \tilde{X}\right)^{-1} \tilde{X}^T \tilde{Y}$$
$$\hat{\beta}_n = \left(\tilde{X}^T \tilde{X}\right)^{-1} \tilde{X}^T \left(\tilde{X}\beta + \varepsilon\right)$$
$$\hat{\beta}_n = \left(\tilde{X}^T \tilde{X}\right)^{-1} \tilde{X}^T \tilde{X}\beta + \left(\tilde{X}^T \tilde{X}\right)^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon$$
$$\hat{\beta}_n = \beta + \left(\tilde{X}^T \tilde{X}\right)^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon \qquad (2.22)$$

Atau

$$\hat{\beta}_n - \beta = \left(\tilde{X}^T \tilde{X}\right)^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon$$

Kemudian dihitung :

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) = \sqrt{n}\left(\tilde{X}^T \tilde{X}\right)^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon$$
$$= n \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\tilde{X}^T \tilde{X}\right)^{-1} \tilde{X}^T \varepsilon$$
$$= n \left(\tilde{X}^T \tilde{X}\right)^{-1} \frac{\tilde{X}^T \varepsilon}{\sqrt{n}}$$
$$= \left(\frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X}\right)^{-1} \frac{\tilde{X}^T \varepsilon}{\sqrt{n}} \qquad (2.23)$$

Dari persamaan (2.21) maka persamaan (2.23) menjadi

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{D} B^{-1} Z \text{ dimana } Z \sim N(0, \sigma^2 B) \qquad (2.24)$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Dengan menggunakan teorema (2.5), maka untuk persamaan (2.24), jika Z~N(0, σ^2B) maka $B^{-1}Z \sim N(0, \sigma^2 B^{-1}BB^{-1})$, sehingga

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 B^{-1}) \qquad (2.25)$$

2.3.1.2. Sifat Konsisten

Estimator kuadrat terkecil $\hat{\beta}_n$ konsisten untuk β artinya $\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\hat{\beta}_n - \beta\right| < \varepsilon\right) = 1$ atau bisa dituliskan plim $\hat{\beta}_n = \beta$.

Dari persamaan (2.27)

$$\hat{\beta}_n = \beta + \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T\varepsilon$$

$$\hat{\beta}_n = \beta + \left(\frac{1}{n}\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\frac{1}{n}\tilde{X}^T\varepsilon$$

$$\text{p lim } \hat{\beta}_n = \beta + \text{p lim}\left(\frac{1}{n}\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\frac{1}{n}\tilde{X}^T\varepsilon$$

$$\text{p lim } \hat{\beta}_n = \beta + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\text{p lim}\,\frac{1}{n}\tilde{X}^T\varepsilon$$

$\text{p lim } \hat{\beta}_n = \beta + B^{-1}.0$ dari lemma 2.3 dan persamaan 2.25

$\text{p lim } \hat{\beta}_n = \beta$

2.3.2. Pemilihan Bandwith

Wahba (1975), Craven dan Wahba (1979) dan Golub, Heath dan Wahba (1979) telah memperkenal kriteria pemilihan *Bandwith* (h) yang optimal dengan menggunakan kriteria GCV (Generalized Cross-Validation) :

$$GCV(h) = RSS(h)/[1-n^{-1}tr(A(h))]^2$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Dari persamaan (2.10), $Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$, i=1,2,,3,...,n, dinyatakan dalam bentuk matriks :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{g} + e \tag{2.31}$$

Didefinisikan $\hat{Y}$ adalah estimator dari E(**Y**) yang bergantung pada h yaitu :

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= X\hat{\beta}_n + \hat{g} \\ &= X\hat{\beta}_n + W(Y - X\hat{\beta}_n) \\ &= X\hat{\beta}_n + WY - WX\hat{\beta}_n \\ &= WY + (1-W)X\hat{\beta}_n \\ &= WY + \tilde{X}\hat{\beta}_n\end{aligned}$$

Didefinisikan $\hat{Y} = A(h)Y$, $GCV(h) = RSS(h)/[1-n^{-1}tr(A(h))]^2$

RSS(h) merupakan rata-rata jumlah kuadrat error

$$RSS(h) = n^{-1}\left\|Y - \hat{Y}\right\|^2 = n^{-1}\left\|Y - A(h)Y\right\|^2 = n^{-1}\left\|(I - A(h))Y\right\|^2 \tag{2.32}$$

Sehingga :

$$\begin{aligned}A(h)Y &= \hat{Y} \\ A(h)Y &= WY + \tilde{X}\hat{\beta}_n \qquad \text{(dikalikan dengan } Y^{-1}\text{)} \\ A(h) &= W + \tilde{X}\hat{\beta}_n Y^{-1} \\ A(h) &= W + \tilde{X}(\tilde{X}^T\tilde{X})^{-1}\tilde{X}^T\tilde{Y}Y^{-1} \\ A(h) &= W + \tilde{X}(\tilde{X}^T\tilde{X})^{-1}\tilde{X}^T(1-W)YY^{-1} \\ A(h) &= W + \tilde{X}(\tilde{X}^T\tilde{X})^{-1}\tilde{X}^T(1-W)\end{aligned}$$

Jadi $A(h) = W + P_{\tilde{X}}(I - W)$, $P_{\tilde{X}} = \tilde{X}(\tilde{X}^T\tilde{X})^{-1}\tilde{X}^T$

Dengan nilai GCV yang minimal akan didapatkan nilai *bandwidth* yang optimal

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

BAB III

MODEL LINEAR PARSIAL

DENGAN KESALAHAN PENGUKURAN

3.1. Estimasi Parameter b dan Fungsi g(.)

Diketahui suatu model linear parsial dari n sampel : $Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$

Dimana kovariate X_i diukur dengan kesalahan. Sebagai pengganti pengamatan X_i, diamati :

$$\mathbf{W_i = X_i + U_i} \tag{3.1}$$

Dimana ukuran error U_i i.i.d, independen dengan (Y_i, X_i, T_i) dengan mean 0 dan matriks kovariansinya Σ_{UU}. Diasumsikan Σ_{UU} diketahui.

Dari persamaan (2.10) dan (3.1) didapatkan :

$$\begin{aligned} Y_i &= X_i^T\beta + g(T_i) + \varepsilon_i \\ &= W_i^T\beta + g(T_i) + \varepsilon_i - U_i^T\beta \\ &= W_i^T\beta + g(T_i) + \varepsilon_i^* \end{aligned} \tag{3.2}$$

Untuk β diketahui sebagai parameter yang benar maka dapat dicari estimasi fungsi g(.) , dari persamaan (3.2) :

$$Y_i - W_i^T\beta = g(T_i) + \varepsilon_i^* \tag{3.3}$$

Model (3.3) dapat dipandang sebagai model regresi nonparametrik dengan respon $Y_i - W_i^T\beta$, dari sub bab 2.2 diperoleh :

$$\hat{g}(t) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(T)(Y_j - W_j^T\beta) \tag{3.4}$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Dalam kasus ini diasumsikan bahwa ε_i mempunyai mean 0 dan variansi tetap σ^2.

Berarti $E\{Y_i - X_i^T\beta - g(T_i)\}^2 = \sigma^2$, sehingga :

$$\begin{aligned} E\{Y_i - W_i^T\beta - g(T_i)\}^2 &= E\{Y_i - X_i^T\beta - U_i^T\beta - g(T_i)\}^2 \\ &= E\{Y_i - X_i^T\beta - g(T_i)\}^2 + E(U_i^T\beta)^2 \\ &= E\{Y_i - X_i^T\beta - g(T_i)\}^2 + \beta^T\Sigma_{UU}\beta \\ &= \sigma^2 + \beta^T\Sigma_{UU}\beta \end{aligned}$$

Persamaan (3.3) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\tilde{Y}_i = \tilde{W}_i^T\beta + \varepsilon_i^*$$

Dengan $\text{MSE} = \hat{\sigma}^{*2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{Y}_i - \tilde{W}_i^T\hat{\beta}\right)^2}{n}$

Karena $\sigma^2 = \sigma^{*2} - \beta^T\Sigma_{UU}\beta$ maka $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^{*2} - \hat{\beta}^T\Sigma_{UU}\hat{\beta}$

Sehingga : $\hat{\sigma}_n^2 = n^{-1}\sum_{i}^{n}\left(\tilde{Y}_i - \tilde{W}_i^T\hat{\beta}_n\right)^2 - \hat{\beta}_n^T\Sigma_{UU}\hat{\beta}_n$ (3.5)

Dari estimasi σ^2 pada persamaan (3.5), akan digunakan untuk menentukan estimasi β sebagai berikut :

$$\hat{b}_n = \left(\tilde{\mathbf{W}}^T\tilde{\mathbf{W}} - nS_{UU}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{W}}^T\tilde{\mathbf{Y}} \qquad (3.6)$$

Setelah mendapatkan $\hat{\beta}_n$, maka β pada persamaan (3.4) diganti dengan $\hat{\beta}_n$, untuk menghitung $\hat{g}_n(t)$.

$$\hat{g}(t) = \sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T)(Y_j - W_j^T\hat{\beta})$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

3.2. Normalitas Asimtotis Untuk Parameter.

Untuk membahas sifat asimtotis dibutuhkan beberapa pengertian, asumsi dan lemma berikut :

Ketidaksamaan Abel :

Barisan bilangan $a_1, a_2, a_3,\ldots,a_n, b_1, b_2, b_3,.., b_n$ ($b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots. \geq b_n \geq 0$) merupakan barisan bilangan real. Maka :

$$b_1\left(\min_{1\leq k\leq n}\sum_{i=1}^{k} a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq b_1\left(\max_{1\leq k\leq n}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)$$

Asumsi 4.

$E(\varepsilon_i) = E(U_i) = 0$ dan $\sup_i E(\varepsilon_i + ||U_i||^4) < \infty$

Lemma A1.

Apabila asumsi 1-4. berlaku, maka :

$$\max_{1\leq i\leq n}\left|G_j(T_i) - \sum \omega_{nk}(T_i) G_j(T_k)\right| = O_P(c_n),\ j=1,2,3,\ldots,p$$

$G_o(.) = g(.)$ dan $G_l(.) = h_l(.)$, $l=1,2,3,\ldots,p$

Lemma A2.

Apabila Asumsi 1- 4 berlaku , maka

$$n^{-1}\tilde{X}^T\tilde{X} = B + o_p(1)$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Lemma A.3 (Ketidaksamaan Bernstein).

Misalkan $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ variabel random saling bebas dengan mean 0 dan range terbatas: $|\Gamma_i| \le M$. Kemudian untuk setiap $\eta > 0$,

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\Gamma i\right| > ?\right\} \le 2\exp\left\{-h^2 / \left[2\left\{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(\Gamma i) + M?\right\}\right]\right\}$$

Dinotasikan $e'_j = e_j I\left(\left|e_j\right| \le n^{1/4}\right)$ dan $e''_j = e_j - e'_j = e_j I\left(\left|e_j\right| > n^{1/4}\right)$, $j = 1, \ldots, n$.

Lemma A.4.

Apabila asumsi 1- 4 dipenuhi, maka :

$$\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{k=1}^{n}? _{nk}(T_i)e_k\right| = o_P\left\{n^{-2/5}\log(n)\right\}$$

Lemma A.5.

Apabila asumsi 1 – 4 dipenuhi, maka :

$$\sum_{i=1}^{n} U_i \tilde{g}_i = o_p(n^{1/2});$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \tilde{g}_i = o_p(n^{1/2})$$

Perlakuan yang sama jika $g(T_i)$ digantikan dengan $h_j(T_i)$.

Lemma A6

Apabila asumsi 1- 4 dipenuhi, maka :

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

$$n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j U_i = o_P(1)$$

$$n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)\varepsilon_j \varepsilon_i = o_P(1)$$

$$n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(T_i)U_j U_i = o_P(1)$$

$$O\{nb_n^2 \log^2(n)\} = o(1)$$

Lemma A7

Diasumsikan bahwa asumsi 1-.3 dipenuhi dan $E(\varepsilon_i + ||U_i||^4) < \infty$, maka

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\tilde{W}^T\tilde{W} = B + \Sigma_{uu} \qquad (3.13)$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\tilde{W}^T\tilde{Y} = B\beta \qquad (3.14)$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\tilde{Y}^T\tilde{Y} = \beta^T B\beta + \sigma^2 \qquad (3.15)$$

Lemma A8.

Apabila asumsi 1-.4 dipenuhi, maka :

$$n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\varepsilon}_i\tilde{X}_i = n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\varepsilon}_i n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i V_i + o_P(1)$$

$$n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\tilde{U}_i^T = n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}V_i U_i^T + o_P(1)$$

Theorema 3.2.1.

Apabila asumsi 1-.4 berlaku, maka :

$$n^{1/2}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right) \xrightarrow{d} N\left(0, B^{-1}\Gamma B^{-1}\right),$$

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

dengan $\Gamma = E\left[\left(\varepsilon - U^T\beta\right)\left\{X - E\left(X|T\right)\right\}\right]^{\otimes 2} + E\left\{\left(UU^T - \Sigma_{UU}\right)\beta\right\}^{\otimes 2} + E\left(UU^T\varepsilon^2\right)$.,

dimana $A^{\otimes 2}=AA^T$

jika ε adalah homoskesdastis dan independan terhadap (X,T).

3.3. Sifat Asimtotis untuk bagian Nonparametrik.

Theorema 3.3.1

Apabila asumsi 1- 3 dipenuhi dan $\omega_{ni}(t)$ kontintinu Lipschitz order 1 untuk semua i = 1,2,…,n. jika $E(\varepsilon^4 + \|\mathbf{U}\|^4) < \infty$, untuk titik disain tetap T_i, bias asimptotik dan variansi asimtotik dari $\hat{g}_n(t)$ adalah :

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(t)g(T_i) - g(t) \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}^2(t)\left(\beta^T\Sigma_{UU}\beta + \sigma^2\right)$$

3.4.Simulasi

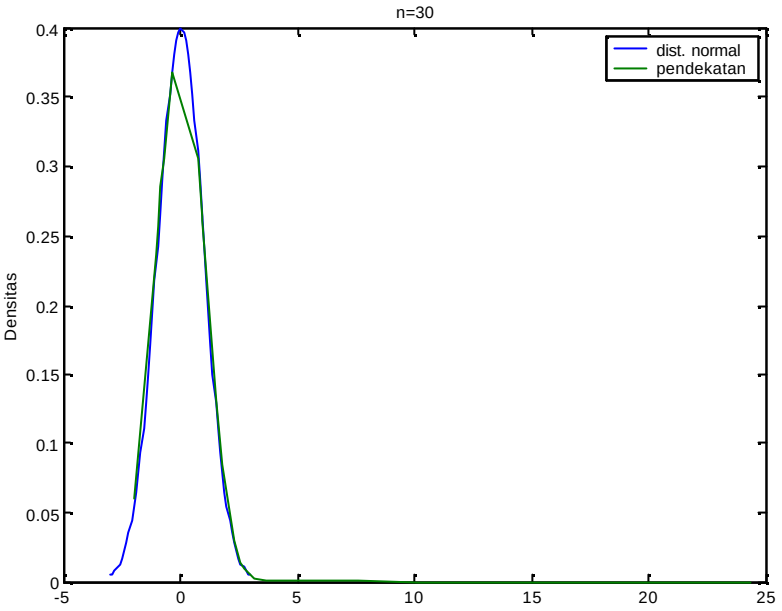
Dari model linear parsial dengan kesalahan pengukuran $Y_i = W_i^T\beta + g(T_i) + \varepsilon_i$ *, akan dilakukan simulasi dengan $g(t) = t^3$, β=(5)

U~N(0,1), ε~N(0,1), T~U(0,1) dan n = 200. Estimasi nonparametrik digunakan estimator Nadaraya Watson dengan kernel Gaussian dan kriteria pemilihan h dngan GCV.

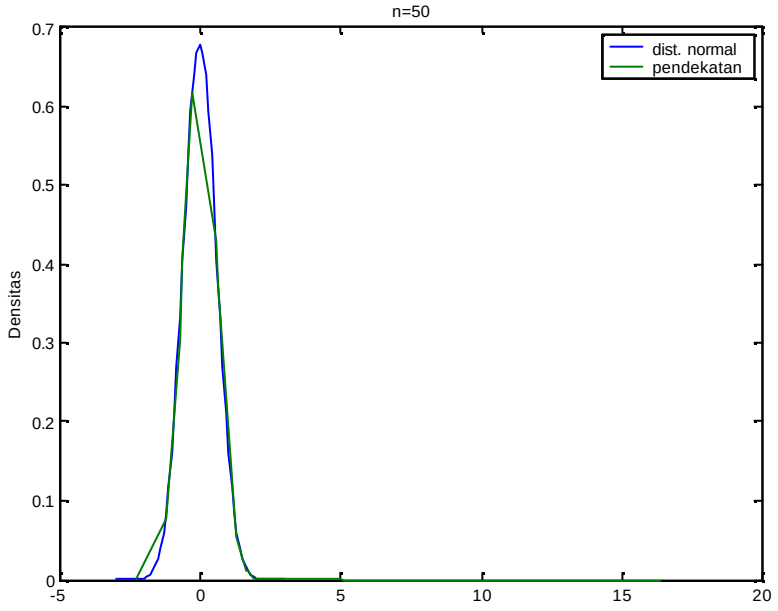
Dari Lampiran 2, plot Y dengan W dan Y dengan T, nampak hubungan Y dan W cenderung linear, Y dan T tidak terlihat pola yang jelas. Sehingga untuk mengestimasi parameter dan fungsi yang tidak diketahui digunakan model linear parsial dengan kesalahan pengukuran.

UNIVERSITAS
GADJAH MADA

Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/



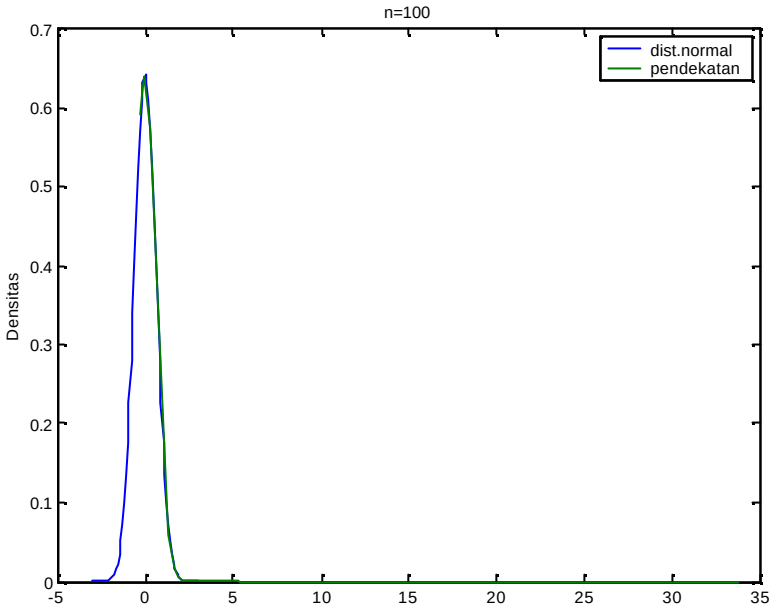
Gambar 3.1. Plot $n^{1/2}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right)$ dengan n=30



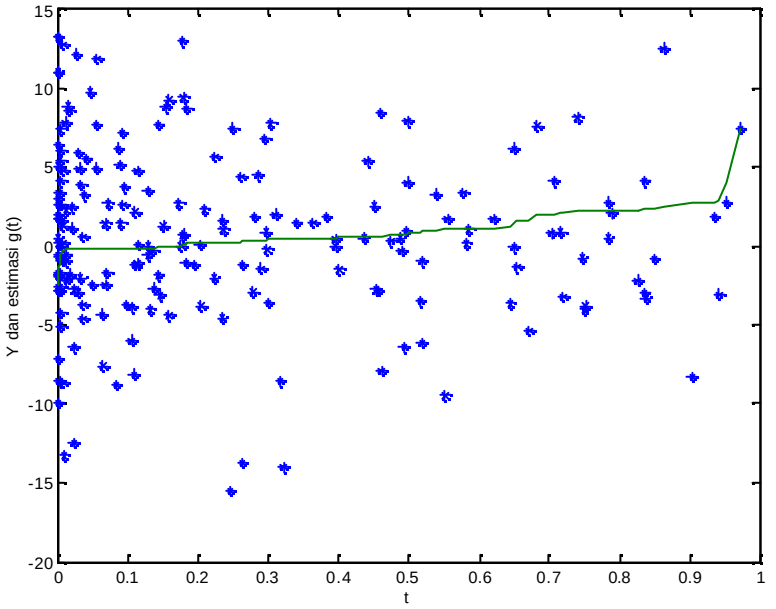
Gambar 3.2. Plot $n^{1/2}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right)$ dengan n=50

UNIVERSITAS
GADJAH MADA

Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

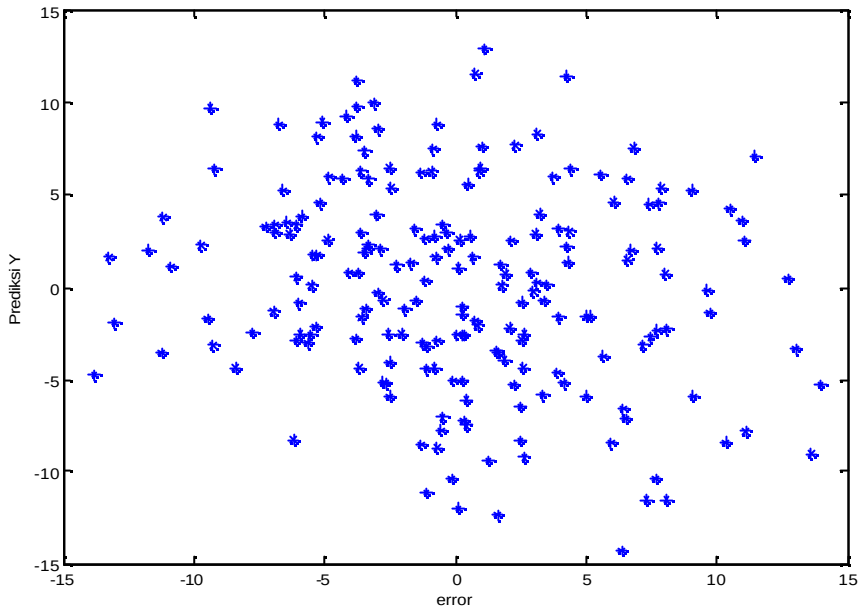


Gambar 3.3. Plot $n^{1/2}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right)$ dengan n=100

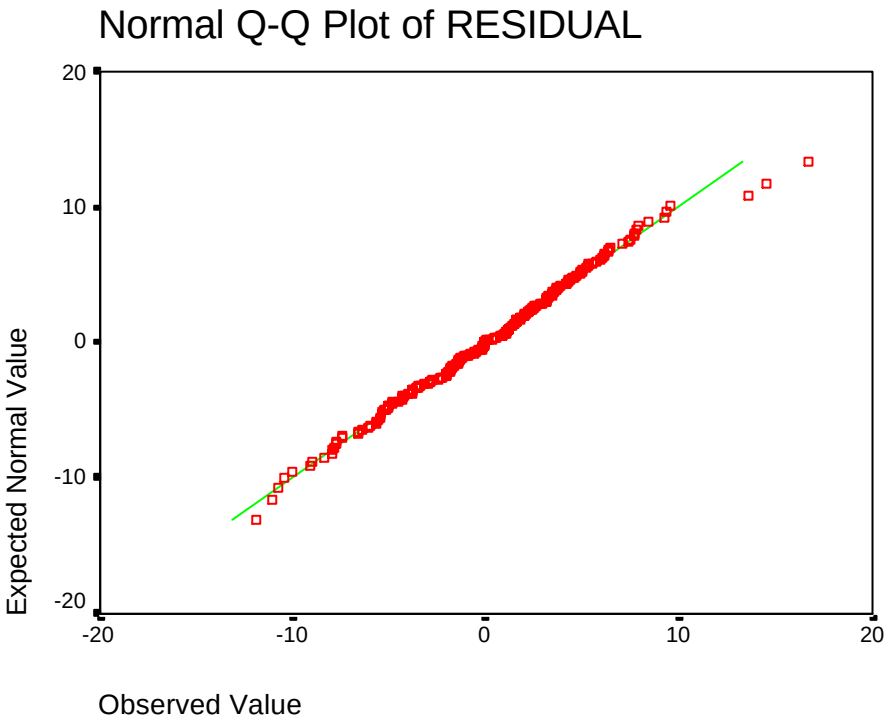


Gambar 3.4. Plot antara t dengan Y dan estimasi g(t) dengan h=0.024

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/



Gambar 3. 5. Plot antara Residual dan Prediksi



Gambar 3. 6. QQ Plot Residual

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Dari hasil simulasi dengan h=0.024 diperoleh, $\hat{\beta}$=5.164, $\hat{\sigma}_{UU} = 2.318$.

Dari Gambar 3.1, 3.2 dan 3.3, distribusi $n^{1/2}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right)$ untuk n berturut-turut 30,50 dan 100, memberikan pendekatan yuang cukup bagus terhadap distribusi normal. Dari plot residual dengan prediksi pada gambar 3.5, nampak residual teralokasi secara random, yang mengindikasikan model sesuai dengan data.

Dari qq plot pada gambar 3.6, residual dapat dibentuk garis lurus, yang mengindikasikan residual mengikuti distribusi normal

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Kesimpulan

Pada Model Linear Parsial dengan Kesalahan Pengukuran,

$Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i$, komponen nonparametrik g(.) diestimasi dengan estimator

Nadaraya Watson : $\hat{g}(t) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{hj}(T)(Y_j - W_j^T\beta)$, sedangkan untuk bagian

parametrik : $\hat{b}_n = \left(\tilde{\mathbf{W}}^T\tilde{\mathbf{W}} - nS_{UU}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{W}}^T\tilde{\mathbf{Y}}$

Sifat kenormalan asimtotis estimator $\hat{\beta}_n$ adalah:

$n^{1/2}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right) \xrightarrow{d} N\left(0, B^{-1}\Gamma B^{-1}\right)$,

dengan $\Gamma = E\left[\left(\varepsilon - U^T\beta\right)\left\{X - E\left(X|T\right)\right\}\right]^{\otimes 2} + E\left\{\left(UU^T - \Sigma_{UU}\right)\beta\right\}^{\otimes 2} + E\left(UU^T\varepsilon^2\right)$.,

dimana $A^{\otimes 2}=AA^T$

Bias asimtotik dan variansi asimtotik dari $\hat{g}_n(t)$ adalah :

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(t)g(T_i) - g(t) \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}^2(t)\left(\beta^T\Sigma_{UU}\beta + \sigma^2\right)$$

4.2. Saran

Untuk penelitian lebih lanjut, perlu diberikan kasus-kasus nyata yang diterapkan pada model linear parsial dengan kesalahan pengukuran, serta identifikasi variabel-variabel prediktornya.

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

DAFTAR PUSTAKA

Casella, G; Berger R.L, 1990, *Statistical Inference,* Wadsworth.Inc, Belmont, California

Chen, H, 1988, *convegence rates for parametrics component in a partly linear model,* Annals of Statistics, i6, 136-146

Drapper N; Smith H. 1998. *Applied Regression Analysis.* John Wiley and Sons. Inc.

Engle, R.F., Granger, C.W.J., Rice,.J. and Weiss.A. 1986, *Semiparametric estimates of the relation between weather and electicity sales.* Journal of the American Statistical Association, 81,310-320.

Hardle,W ; Liang, Hand Gao,J. 2000. *Partially Linear Models.* Physica-Verlag Heidelberg New York.

Hardle W. 1991. *Smoothing Techniques with implementation in S*. Springer Verlag New York.

Pfeffer, W.F, 1993, *The Riemann approach to integration,* Cambridge University Press.

Rohatgi, V.K, 1976, *An Introduction To Probability And Mathematical Statistics,* John Wiley and Sons.Inc. New York.

Rudin, W, 1976, *Principles of Mathematical Analysis,* McGraw-Hill, London

Sen, P.K anf singer, J.K. 1990. *Large Sample Methods in statistics, an Introduction With applications,* Chapmen & Hall, London.

Serfling, R.J. 1980. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Wiley & Sons. New York

Severini, T.A. and Stanoswalis, J.G. 1994. *Quasilikelihood estimation in semiparametric models*. Journal of the American Statistical Association, 89, 501-511

Wand, M.P; Jones, M.C. 1995. *Kernel Smoothing* Chapmen & Hall, UK

Wayne A. Fuller and Miochale A.1978. *Regression Estimation Aftr Correction for Attenuation*. Journal of the American Statistical Association, 73,99-104.

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Lampiran 1a.

Program Pemilihan Parameter Penghalus h

```
function [input,output]=GCV;
Beta=5;
B=Beta;
U=randn(1,200);
U=U';
S=var(U);
X=randn(1,200);
X=X';
W=X+U;
e=randn(1,200);
e=e';
T=rand(1,200);
T=T';
t=T.^3;
Y=(W*B)+t+(e-(U*B));
h=[0.09,0.08,0.07,0.06,0.05,0.04,0.10,0.011,0.12,0.12,0.013,0.014,0.015,0.016,
0.017,0.018,0.019,0.02,0.021,0.022,0.023,0.024,0.025,0.026,0.027,0.028,0.029,
0.03,0.031,0.032,0.037,0.038,0.039,0.04,0.041,0.042,0.043,0.044,0.045,0.046,
0.047,0.048,0.049,0.05,0.051,0.052,0.053,0.054,0.55,0.056,0.57,0.58,0.59,0.06,
0.061,0.062,0.06,0.064,0.65,0.66,0.68,0.69,0.7,0.8,0.9];
h=h';
m1=diag(t);
m2=diag(W);
m3=diag(Y);
m4=(ones(size(m1))*m1);
m5=(ones(size(m2))*m2);
m6=(ones(size(m3))*m3);
n=length(h);
m7=m4'-m4;
for I=1:n,
        m8=m7/h(I,1);
        m9=(ones(size(m1)));
        m10=(m8.^2)/-2;
        m11=exp(m10)/sqrt(2*pi);
        m12=(ones(size(t)));
        m13=m11*m12;
        m14=m11.*m5;
        m15=m14*m12;
        m16=m15./m13;
        m17=W-m16;
        a1=diag(m13);
        a2=(m9*a1);
```

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/


```
        a3=m11./a2';
        a4=inv(m17'*m17);
        a5=m17*a4*m17';
        a6=diag(m12)-a3;
        a7=a3+(a5*a6);
        a8=(diag(m12)-a7)*Y;
        a9=a8.^2;
        a10=m13'*a9;
        a11=a10/n;
        a12=trace(a7);
        a13=a12/n;
        a14=(1-a13)^2;
        a15=a11/a14;
  g(I)=a15;
end;
gt=g';
disp(' Nilai GCV=');disp(gt);
k=min(gt)
plot(h,gt);
figure;
for i=1:n
   if gt(i)==k
      h1=h(i)
   end;
end;
```

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Lampiran 1.b.

Program Estimasi

```
function[i,o]=estimasi;
Beta=5;
B=Beta;
n=200;
U=randn(1,200);
U=U';
S=var(U);
X=randn(1,200);
X=X';
W=X+U;
e=randn(1,200);
e=e';
T=rand(1,200);
T=T';
t=T.^3;
Y=(W*B)+t+(e-(U*B));
m1=diag(t);
m2=diag(W);
m3=diag(Y);
m4=(ones(size(m1))*m1);
m5=(ones(size(m2))*m2);
m6=(ones(size(m3))*m3);
h=input('nilai h :');
m7=m4'-m4;
m8=m7/h;
m9=(ones(size(m1)));
m10=(m8.^2)/-2;
m11=exp(m10)/sqrt(2*pi);
m12=(ones(size(t)));
m13=m11*m12;
m14=m11.*m5;
m15=m14*m12;
m16=m15./m13;
m17=W-m16;
m18=m11.*m6;
m19=m18*m12;
m20=m19./m13;
m21=Y-m20;
m22=inv(m17'*m17-n);
disp(m22);
m23=m22*m17'*m21;
m24=W*m23;
```

UNIVERSITAS
GADJAH MADA

Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/


```
m25=Y-m24;
m26=diag(m25);
m27=m9*m26;
m28=m11.*m27;
m29=m28*m12;
m30=m29./m13;
disp(m30);
m31=Y-(m24+m30);
disp('g hat');disp(m30);
disp('e=');disp(m31);
disp('Beta=');disp(m23);
m32=m23*X+m30;
disp('Y dugaan=');disp(m32);
W1=(ones(size(W)));
W2=mean(W)*W1;
W3=(W-W2).^2;
gt=sort(m30);
disp('Beta=');disp(m23);
Sigma=((m25'*m25)/n)-(m23*S*m23)
W4=sum(W3)/199
m31;
tt=sort(t);
ee=sort(m31);
plot(ee,'*');
figure;
plot(m32,m31,'*');
figure;
plot(W,Y,'*');
figure;
plot(t,Y,'*');
figure;
plot(tt,Y,'*',tt,gt)
```

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Lampiran 1c.

Program Replikasi b

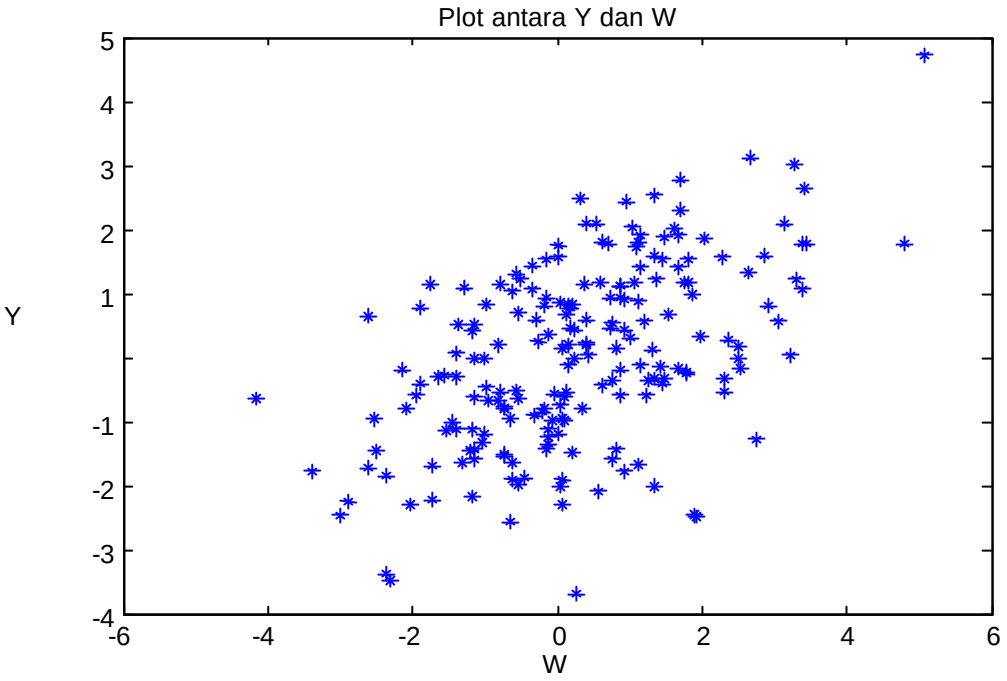
```
function [i,o]=Pivot;
ni = input('Banyak Beta = ');
for j=1:ni
Beta=5;
B=Beta;
n=200;
U=randn(1,200);
U=U';
S=var(U);
X=randn(1,200);
X=X';
W=X+U;
e=randn(1,200);
e=e';
T=rand(1,200);
T=T';
t=T.^3;
Y=(W*B)+t+(e-(U*B));
m1=diag(t);
m2=diag(W);
m3=diag(Y);
m4=(ones(size(m1))*m1);
m5=(ones(size(m2))*m2);
m6=(ones(size(m3))*m3);
h=0.024;
m7=m4'-m4;
m8=m7/h;
m9=(ones(size(m1)));
m10=(m8.^2)/-2;
m11=exp(m10)/sqrt(2*pi);
m12=(ones(size(t)));
m13=m11*m12;
m14=m11.*m5;
m15=m14*m12;
m16=m15./m13;
m17=W-m16;
m18=m11.*m6;
m19=m18*m12;
m20=m19./m13;
m21=Y-m20;
m22=inv(m17'*m17-n*S);
m23=m22*m17'*m21;
```

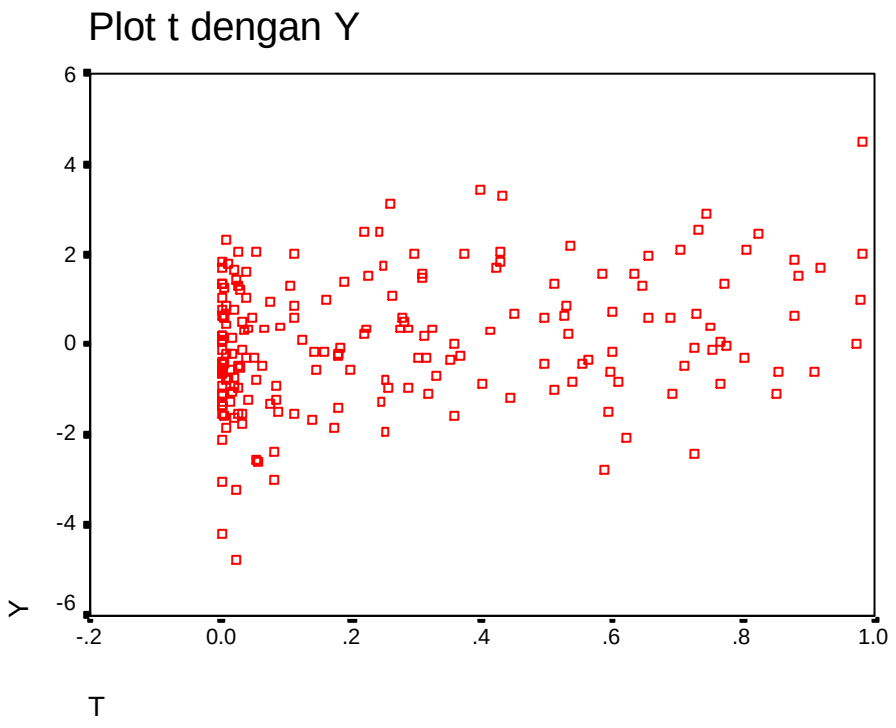
UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/


```
m24=W*m23;
m25=Y-m24;
m26=diag(m25);
m27=m9*m26;
m28=m11.*m27;
m29=m28*m12;
m30=m29./m13;
m31=Y-(m24+m30);
m32=m23*X+m30;
Bt(j)=m23
W1=(ones(size(W)));
W2=mean(W)*W1;
W3=(W-W2).^2;
W4=sum(W3)/199
end;
sBt=sort(Bt);
mean(Bt)
vBt=std(Bt)
Bt_norm=sqrt(ni)*(sBt-5);
pBt_norm=normpdf(Bt_norm,0,vBt);
xa=[-3:0.1:3];
f=normpdf(xa,0,vBt);
axes;
dg1=[xa' f'];
dg2=[Bt_norm' pBt_norm'];
plot(xa,f,Bt_norm,pBt_norm)
```

UNIVERSITAS
GADJAH MADA
Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/

Lampiran 2





UNIVERSITAS
GADJAH MADA

Model linear parsial dengan kesalahan pengukuran
WIBAWATI, Prof.Drs. H. Subanar, PhD
Universitas Gadjah Mada, 2003 | Diunduh dari http://etd.repository.ugm.ac.id/